

SECCIÓN CRÍTICA, ESBELTEZ Y REGIONES B-D PARA DISEÑO A CORTANTE DE TRABES DE CONCRETO REFORZADO

Hans I. Archundia Aranda¹ y Arturo Tena Colunga¹

RESUMEN

Entre los parámetros que definen el comportamiento y diseño a cortante de las trabes de concreto reforzado, están: i) la sección crítica, ii) la esbeltez y, iii) las regiones B-D. La sección crítica y la esbeltez fueron propuestas a partir del ensayo de trabes sin refuerzo transversal, por lo que su extensión y aplicación en trabes con estribos es cuestionable. Por otra parte, es común subdividir los elementos estructurales en función de las trayectorias de los esfuerzos principales elásticos (regiones B-D), y con ello diseñar el estado límite de falla. Estas inconsistencias han oscurecido el entendimiento del mecanismo resistente a cortante y los métodos de diseño de las trabes de concreto reforzado. En un intento por corregir esta situación, se desarrollaron definiciones para los tres parámetros arriba mencionados usando de manera consistente campos de esfuerzo y modelos de armadura. Con estas definiciones se analizaron algunos resultados experimentales disponibles en la literatura, lo que permitió: i) validar el método de diseño original para trabes esbeltas del reglamento ACI-318 e, ii) identificar una anomalía estructural que se denominó seudo-esbeltez. La seudo-esbeltez puede evitarse si se atienden recomendaciones sencillas para distribuir el acero de refuerzo transversal.

Palabras clave: cortante, sección crítica, esbeltez, regiones B-D, campos de esfuerzo, modelos de armadura, modelo de puntales y tensores.

ABSTRACT

The shear critical section was suggested by the “Committee 326” (1962 a/b) as a parameter that controls the shear design of slender reinforced concrete (RC) beams. Although the shear critical section is supported by tests in beams without stirrups, it is also applied in beams with transverse reinforcement. Actually, the slenderness in beams with and without stirrups is sized by means of the a/d ratio; nevertheless, this parameter is only full valid in beams without transverse reinforcement (Kani 1964). Schlaich *et al.*, (1987) classified RC elements into B and D regions. These B-D regions are identified with elastic stress fields, but are designed with plastic truss models or beam theory equations that work with plastic concrete and steel yielding. All these extrapolations confuse the shear design in RC beams. In this paper rational definitions are presented for the shear critical section, beam slenderness, and B-D regions. These definitions are supported with stress fields and truss models and cover uncracked and diagonal cracked stages. Some experimental tests were studied with these new definitions validating the original ACI-318 Code shear design approach for slender beams. The results of the described studies allowed identifying a structural anomaly that was named pseudo-slenderness. This structural anomaly can be prevented attending simple detailing recommendations for the transverse reinforcement.

Keywords: shear, critical section, beam slenderness, B-D regions, stress fields, truss models, strut and tie models.

RESUMO

Entre os parâmetros que definem o comportamento e design do corte de vigas de concreto armado, estão: i) a seção crítica, ii) a esbeltez e iii) as regiões B-D. A seção crítica e a esbeltez foram propostas testadas em vigas sem reforço transversal, portanto a sua extensão e aplicação em vigas com estribos é questionável. Além disso, é comum subdividir os elementos estruturais de acordo com as trajetórias das tensões principais elásticas (regiões B-D), e com ele projetar o estado limite de falha. Estas inconsistências têm obscurecido a compreensão do mecanismo de resistência ao cisalhamento e métodos de concepção de vigas de concreto armado. Na tentativa de corrigir esta situação, foram desenvolvidas

⁽¹⁾ Profesores. Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco. Departamento de Materiales. Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, México D.F.

E-mail: archundia_aranda@yahoo.com.mx; atc@correo.uazc.uam.mx

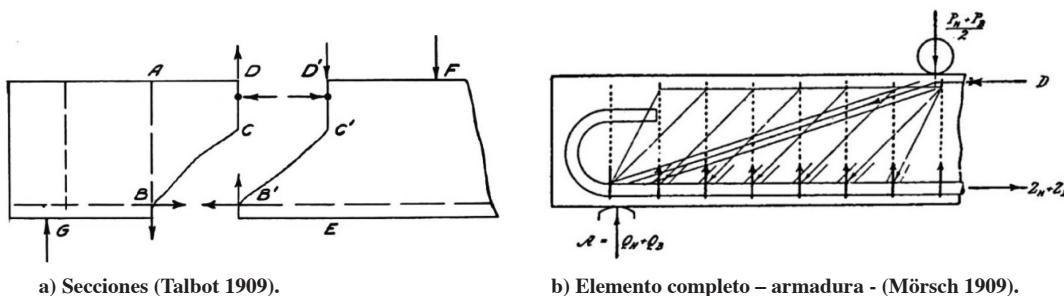
Artículo recibido el 11 de abril de 2014 y aprobado el 8 de enero de 2015.

definições para os três parâmetros acima mencionados usando de forma consistente, campos de esforços e modelos de armaduras. Com estas definições alguns resultados experimentais disponíveis na literatura foram analisados, permitindo: i) validar o método de design original para vigas esbeltas do regulamento ACI-318 e, ii) identificar uma anormalidade estrutural que se denominou pseudoesbeltez. A pseudoesbeltez pode ser evitada se forem atendidas as recomendações simples para distribuir o aço de reforço transversal.

Palavras-chave: cortante, seção crítica, esbeltez, regiões B-D, campos de esforço, modelos de armaduras, modelo de pontais e tensores.

1. INTRODUCCIÓN

En la primera década del siglo XX se llevaron a cabo en Estados Unidos y Alemania experimentos en trabes de concreto reforzado para elaborar métodos de diseño a cortante. En Alemania los trabajos fueron liderados por Mörsch (1909), y en Estados Unidos por Talbot (1909). Las aportaciones de ambos ingenieros dejan en claro que tomaron posturas diferentes: Talbot se basó en el equilibrio de secciones (Fig. 1-a), y Mörsch en modelos de armadura (Fig. 1-b). Además, Talbot tomó en cuenta la resistencia que aporta el concreto antes del agrietamiento por tensión diagonal (contribución del concreto), y Mörsch privilegió la integridad estructural sobre la economía y recomendó resistir el cortante sólo con acero de refuerzo. Estas diferencias siguen vigentes, pues existen métodos de diseño por secciones y de elemento completo (Alcocer 1998). Tradicionalmente, los primeros incluyen la contribución del concreto y los segundos la ignoran; los primero incluyen una sección crítica por cortante y los segundos la omiten; los primeros usan ecuaciones seccionales y en los segundos métodos gráficos. El mejor ejemplo de un reglamento de diseño por secciones es el ACI-318 (estadounidense) y de elemento completo el CEB-FIP-90 (europeo). Los reglamentos Eurocode-2-04, CSA-04 y FIB-2010 combinan aspectos de ambos criterios de diseño, pues utilizan ecuaciones seccionales desarrolladas a partir de modelos de armadura y economizan el diseño incorporando la contribución del concreto.



a) Secciones (Talbot 1909).

b) Elemento completo – armadura - (Mörsch 1909).

Fig. 1: Enfoques de diseño a cortante en trabes de concreto reforzado.

La sección crítica fue sugerida por el “Committee 326” (1962 a/b) para validar la contribución del concreto en trabes sin refuerzo transversal. Sin embargo, en el reglamento ACI-318 se simplificó su definición y se extrapoló de manera no muy clara a las trabes con refuerzo transversal (Fig. 2). En la literatura existen propuestas de diseño que involucran una sección crítica diferente a la del reglamento ACI-318; sin embargo, también son para trabes sin estribos y parecen estar más relacionadas con la resistencia última. En efecto, conceptualmente, la contribución del concreto del reglamento ACI-318 no es la resistencia última de una trabe esbelta sin estribos, aunque en algunos casos pueden coincidir.

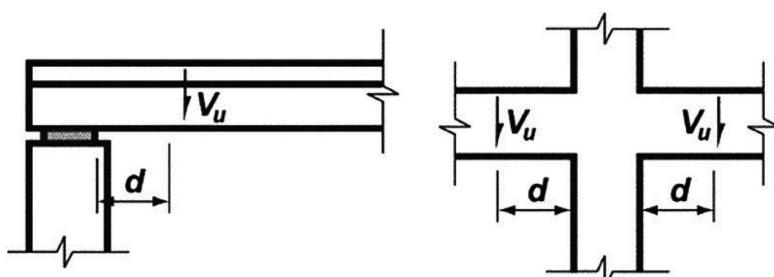


Fig. 2: Ubicación de la sección crítica por cortante en trabes prismáticas (ACI-318-11).

La esbeltez es un parámetro importante que define el comportamiento de las trabes de concreto reforzado, y tradicionalmente se cuantifica con el cociente del claro de cortante entre el peralte efectivo (a/d). Se ha aceptado que $a/d = 2$ divide a las trabes en “cortas” y “esbeltas” sin importar si tienen o no refuerzo transversal. Sin embargo, y atendiendo a su origen, la relación a/d es exclusiva de trabes sin estribos (Kani 1964). Por ello, es cuestionable que se utilice este cociente para clasificar la esbeltez de las trabes con estribos con la finalidad de sugerir modelos de armadura plástica (Fig. 3a).

Schlaich et al., (1987) subdividieron los elementos de concreto reforzado atendiendo las características de las trayectorias de los esfuerzo principales elásticos. La clasificación involucra dos regiones diferentes: regiones B y regiones D (Fig. 4). En las regiones B las trayectorias de esfuerzo son regulares (suaves, uniformes) y obedecen las hipótesis de Bernoulli. Las regiones D se caracterizan por tener trayectorias de esfuerzo con disturbios (cambiantes, irregulares). Las regiones D se generan por concentración de esfuerzos debido a cargas, reacciones o cambios bruscos de geometría, y tienen una extensión de un peralte efectivo. Las regiones B-D también se han sugerido para identificar indistintamente la esbeltez de las trabes con y sin estribos (Fig. 3b).

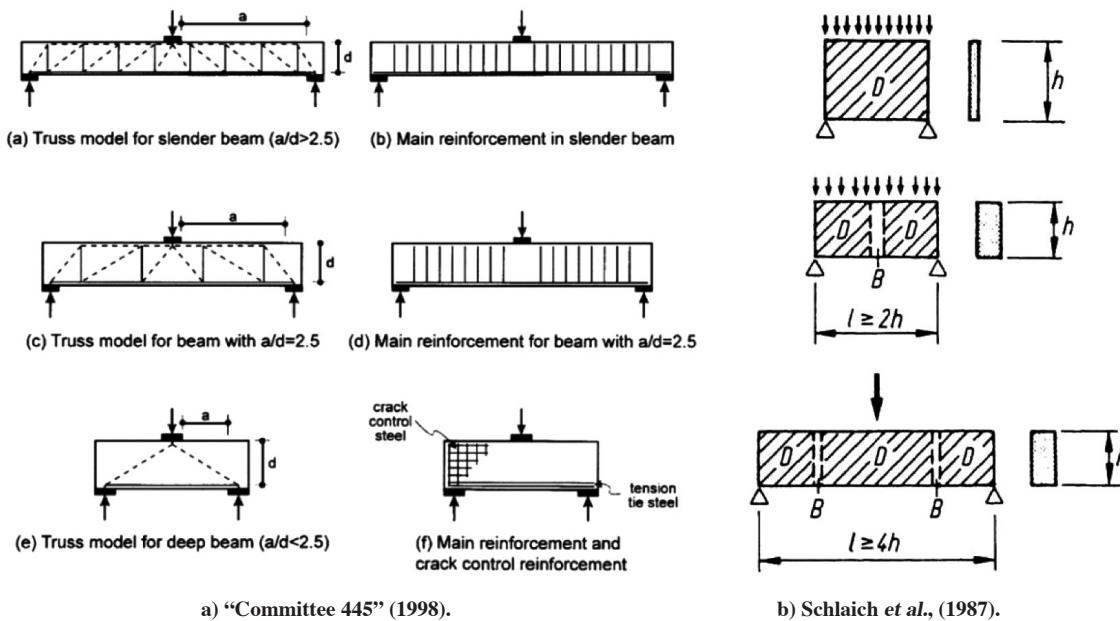


Fig. 3: Opciones vigentes para clasificar las trabes en cortas y esbeltas.

Con base en estos antecedentes, es claro que las ecuaciones del cuerpo principal de los reglamentos de diseño deben usarse sólo en las regiones B. Esto implica diseñar el estado límite de falla, usando las propiedades plásticas de los materiales, en regiones identificadas con campos de esfuerzo elásticos que son representativos del estado límite de servicio. Además, el enfoque de diseño con regiones B-D obliga a diseñarlas por separado, pues se argumenta que el equilibrio seccional es el único vínculo importante entre ellas (Schlaich et al., 1987, “Subcommittee 445-1” 2002).

Atendiendo al origen de los métodos de diseño por cortante, es evidente que lo que debería involucrar elecciones sencillas sobre cómo diseñar una trabe de concreto reforzado, por ejemplo: hacer un diseño seccional o de elemento completo, e incluir o no la contribución del concreto, con los años ha involucrado conceptos que no están bien respaldados por la mecánica del concreto. La situación justifica analizar los parámetros que gobiernan el diseño a cortante de las trabes de concreto reforzado, y hacer un intento por definirlos en apego a un modelo de comportamiento mecánico. Las aportaciones de este trabajo parten de la hipótesis de que Talbot y Mörsch propusieron métodos de diseño que son seguros, no excluyentes, y que se complementan. Finalmente, el desarrollo original fue elaborado para el diseño de trabes acarteladas (Archundia y Tena 2014a) pero, por restricción de espacio, se limita a las de sección constante.

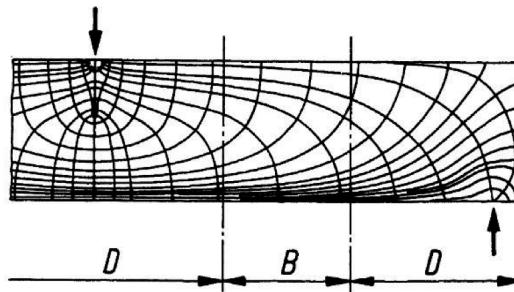


Fig. 4: Clasificación en regiones B-D sugerida por Schlaich et al., (1987).

2. ORIGEN DE LA ESBELTEZ Y LA SECCIÓN CRÍTICA

Kani (1964) identificó los mecanismos resistentes de las trabes prismáticas sin refuerzo transversal y los llamó de “arco” y de “viga” (Fig. 5). En el mecanismo de arco la carga se transmite directamente al apoyo y no requiere adherencia del acero longitudinal en tensión. Por su parte, en el mecanismo de viga la transmisión es indirecta y requiere adherencia entre el concreto y el acero. En claros con cortante constante, el predominio de ellos es función del cociente del claro de cortante entre el peralte efectivo de la sección (a/d). La frontera entre ambos mecanismos está en $a/d = 2.5$ (Fig. 6a). Para relaciones $1 \leq a/d \leq 2.5$ predomina el mecanismo de arco, y cuando $2.5 < a/d < 5.6$ el de viga. En relaciones $a/d \geq 5.6$ la falla es por flexión.

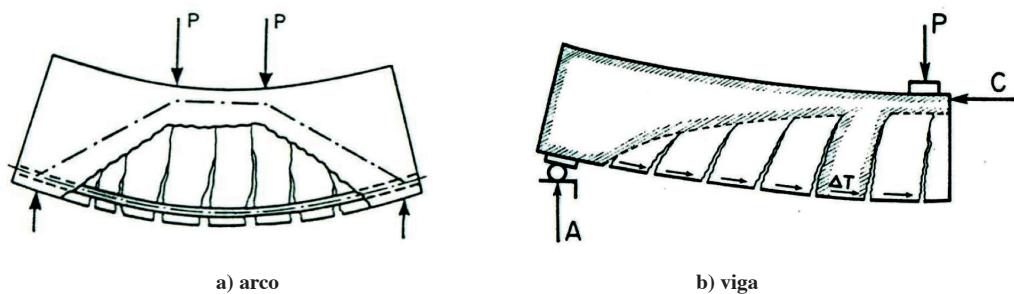


Fig. 5: Mecanismos de cortante identificados por Kani (1964).

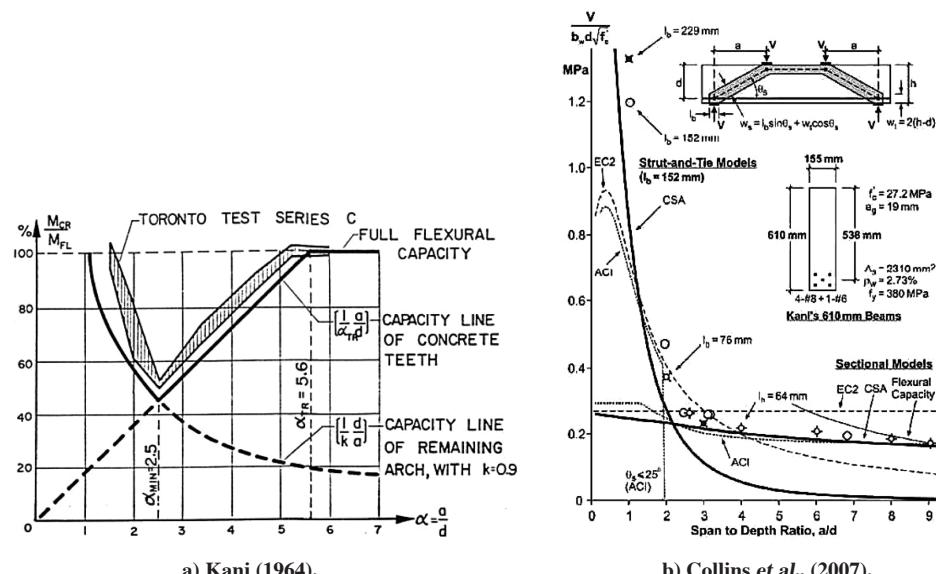


Fig. 6: Comportamiento de las trabes sin estribos en función de cociente a/d .

La figura 6b es de Collins *et al.*, (2007) y muestra los resultados de Kani en función del cortante. En la figura se compara la resistencia experimental contra la obtenida de un modelo de armadura de puntal directo y de métodos seccionales. En ambos casos se usaron los reglamentos de Estados Unidos, Europa y Canadá (ACI-318, EC2 y CSA, respectivamente). En la figura 6b se muestra la frontera que divide la aplicación del modelo de puntal directo (mecanismo de arco) y los métodos seccionales (mecanismo viga), la cual yace en el intervalo $2 \leq a/d \leq 2.5$, usualmente $a/d = 2$. Con el tiempo a las trabes con $a/d \leq 2$ se les ha dado el nombre de trabes cortas, y las que satisfacen $a/d > 2$ trabes esbeltas. Con todo rigor, esta clasificación sólo es válida en trabes sin estribos.

Los resultados mostrados en la figura 6 permiten entender las restricciones del “Committee 326” (1962 a/b) para aplicar correctamente el método de diseño del reglamento ACI-318 que utiliza la contribución del concreto:

1. En trabes en las que $a > 2d$ el método no es válido dentro de una distancia d medida desde cualquier extremo del claro de cortante.
2. Si $0.75d \leq a \leq 2d$ el método solamente es válido en la sección ubicada a la mitad del claro de cortante.
3. Cuando $a \leq 0.75d$ el método no se puede aplicar.

De estas restricciones se deduce que: i) la contribución del concreto está fuertemente asociada al mecanismo de viga ($a/d > 2$) y, ii) las secciones críticas están ubicadas a una distancia de un peralte efectivo del apoyo o carga concentrada. Estos requisitos están simplificados en el reglamento ACI-318, donde para los casos más comunes de trabes con y sin estribos, la sección crítica está a una distancia de un peralte efectivo (d) medida desde el apoyo (Fig. 2). Se hace notar que en una trabe típica, la ubicación de la sección crítica del reglamento del ACI-318 coincide con la frontera de las regiones B-D definidas por Schlaich *et al.*, (1987), pues ambas están a un peralte efectivo del apoyo.

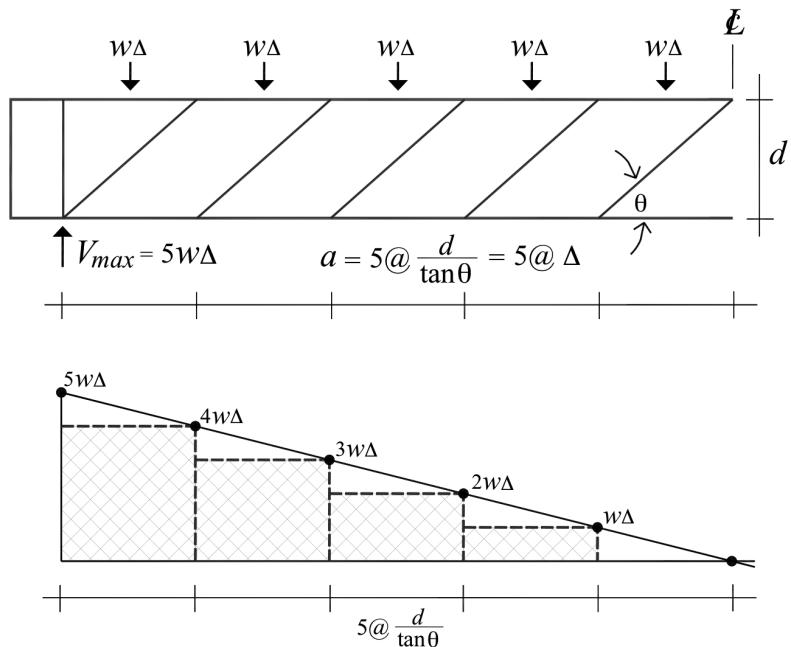


Fig. 7: Diagrama de cortante escalonado recomendado en la literatura.

Una opción para diseñar vigas con estribos y cargas distribuidas es usar un diagrama de cortante escalonado (Collins y Mitchell 1980, Martí 1986). En la figura 7 se muestra un caso típico, donde la longitud de cada “escalón” es igual a la de los tableros de un modelo de armadura plástica ($d/\tan\theta$). Si el escalonamiento se hace con $\theta = 45^\circ$, que es el ángulo implícito en el reglamento ACI-318, entonces la extensión del escalón pegado al apoyo es igual al peralte efectivo (d). En esta situación, la frontera interior de ese escalón coincide con: i) la ubicación de la sección crítica supuesta en el reglamento ACI-318 y, ii) la frontera vertical entre las regiones B-D adyacentes al apoyo de una trabe típica.

Esto podría explicar por qué en el reglamento ACI-318 no se ha hecho diferencia entre la sección crítica de las trabes con y sin refuerzo transversal. Al parecer, esta situación ha sido aceptada por varios investigadores. Por ejemplo, Rogowsky (1983) sostuvo que por razones ajenas a la plasticidad también en el reglamento ACI-318 se permite el escalonamiento aunque sólo sea en una sección, siendo en la que se presenta el cortante máximo (en obvia referencia a la regla de no diseñar con el cortante del apoyo, sino con el de la sección crítica).

Aunque estos antecedentes sugieren cierto consenso en la ubicación de la sección crítica por cortante, lo cierto es que no dejan de ser semiempíricos, sobre todo en las trabes con refuerzo transversal. Por ello, es conveniente intentar darle a este parámetro un mínimo de rigor teórico que esté sustentado en un modelo de comportamiento mecánico.

3. SECCIÓN CRÍTICA PLÁSTICA

En la figura 8a se muestran los campos de esfuerzo cercanos al apoyo de una trabe con estribos agrietada por cortante. El esquema es válido para trabes con cargas puntuales y distribuidas (Muttoni et al., 1997), y para la combinación de cargas gravitacionales y sísmicas (Archundia 2013). En la figura 8b se bosqueja el modelo de armadura plástica que representa dichos campos de esfuerzo, y en la figura 8c se presentan las regiones B-D que se proponen en este trabajo. Los tres esquemas de la figura 8 permiten identificar la relación natural que existe entre los campos de esfuerzo, los modelos de armadura plástica, y las regiones B-D, pues en ellos es común la distancia crítica $x_{cr} = d/\tan \theta$ que es igual a: i) tanto a la proyección horizontal del agrietamiento diagonal representado por un campo de compresión diagonal, como a la proyección horizontal del campo de compresión radial que se forma en la reacción (Fig. 8a), ii) la longitud de los tableros del modelo de armadura plástica (Fig. 8b) y, iii) la extensión de la región D, es decir, la frontera vertical entre las regiones B y D adyacentes al apoyo (Fig. 8c).

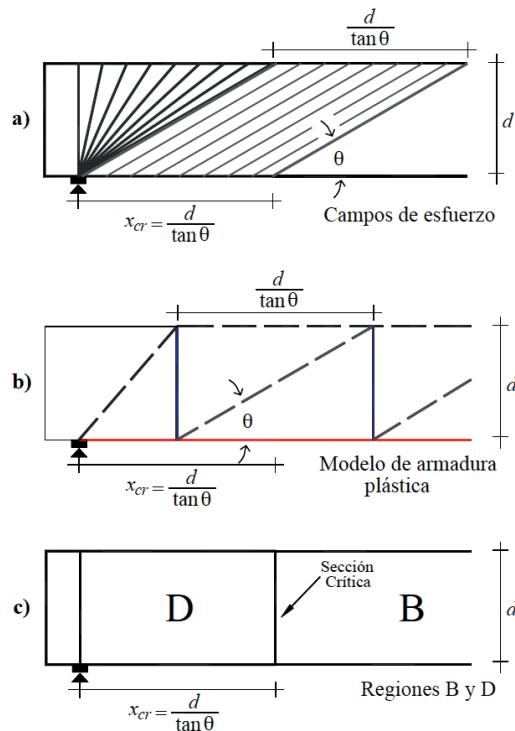


Fig. 8: Correlación entre campos de esfuerzo, modelos de armadura y regiones B-D plásticas.

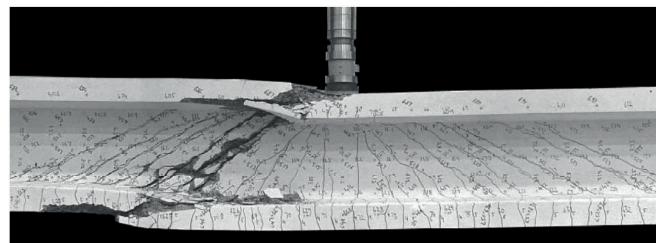
Como la sección crítica por cortante en las trabes con refuerzo transversal yace en la frontera vertical entre las regiones B-D, identificadas con campos de esfuerzo relacionados con un modelo de armadura plástica, se les ha denominado regiones B-D plásticas. Por extensión, la sección crítica es una sección crítica plástica que tiene las siguientes características (Fig. 8):

- 1) Pasa por el punto centroidal del campo de compresión diagonal que es adyacente al campo de compresión en forma de abanico que se forma en la reacción (Fig. 8a) y,
- 2) Divide en dos partes iguales el tablero de armadura adyacente al puntal que transmite la carga a la reacción (Fig. 8b).

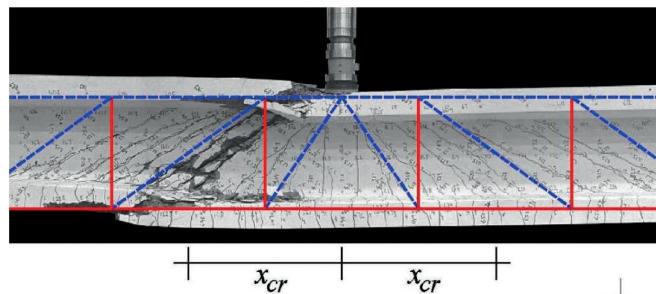
Al ampliar el análisis se llega a las siguientes conclusiones:

- La extensión de las regiones D definidas por Schlaich *et al.*, (1987) es un caso particular de la que se propone en este trabajo, pues está anclada al ángulo $\theta = 45^\circ$.
- Cuando $\theta = 45^\circ$ la ubicación de la sección crítica coincide con la del reglamento ACI-318.

Finalmente, y a manera de definición, la sección crítica por cortante en las trabes prismáticas con refuerzo transversal se ubica a una distancia del apoyo $x_{cr} = d/\tan \theta$, y es la frontera vertical entre las regiones B y D plásticas. La sección crítica pasa por la longitud media del puntal de la región B adyacente al apoyo, y en ella se presenta el aplastamiento del alma que caracteriza a la falla por cortante (Fig. 9). No se conoce una definición para la sección crítica en trabes con refuerzo transversal como la que se propone; sin embargo, sería injusto negar la influencia de Martí (Cerruti y Martí 1987, Sigrist *et al.*, 1995, Kaufmann 1998) y Reineck (1991 y 2002).



a) Original (Kaufmann y Martí 1996).



b) Propuesta de modelo de armadura indicando la ubicación de la sección crítica.

Fig. 9: Aplastamiento del puntal en la sección crítica.

4. ESBELTEZ PLÁSTICA

En la figura 10 se muestra el caso típico de una trabe simplemente apoyada con dos cargas puntuales simétricas. En la trabe se han bosquejado los campos de esfuerzo, el modelo de armadura plástica que los representa, y las regiones B-D. Puesto que en una trabe esbelta el mecanismo gobernante debe ser el de viga, entonces el claro de cortante (a) debe tener la longitud suficiente para albergar una región B. Para ello, es requisito que el claro de cortante tenga una longitud igual o mayor a la extensión de las regiones D formadas en los extremos del claro de cortante (Ec. 1).

$$a \geq \frac{d}{\tan \theta} + \frac{d}{\tan \theta} = \frac{2d}{\tan \theta} \quad (1)$$

La Ecuación 1 indica que el comportamiento global de las trabes con refuerzo transversal no sólo depende de las proporciones del elemento, medido usualmente con el cociente a/d (Fig. 3), sino también del ángulo de inclinación del campo de compresión diagonal (θ) supuesto en el diseño, o de manera más realista: el que promueva la posición dis-

creta del refuerzo transversal, como se explica más adelante. No menos importante es que la Ecuación 1 indica que el valor de θ no puede elegirse libremente, como lo han sugerido algunos investigadores que le han dado más importancia a la compatibilidad de esfuerzos y deformaciones en los métodos diseño, que verificar o fomentar el desarrollo de una región B que la justifique (por ejemplo, Collins y Mitchell 1980 y 1986, Collins *et al.*, 1996, Bentz *et al.*, 2006, Sigrist 2011).

$$\lambda_p = \frac{a}{l_{BP}} = \frac{a}{\frac{2d}{\tan \theta}} = \frac{a(\tan \theta)}{2d} \quad (2)$$

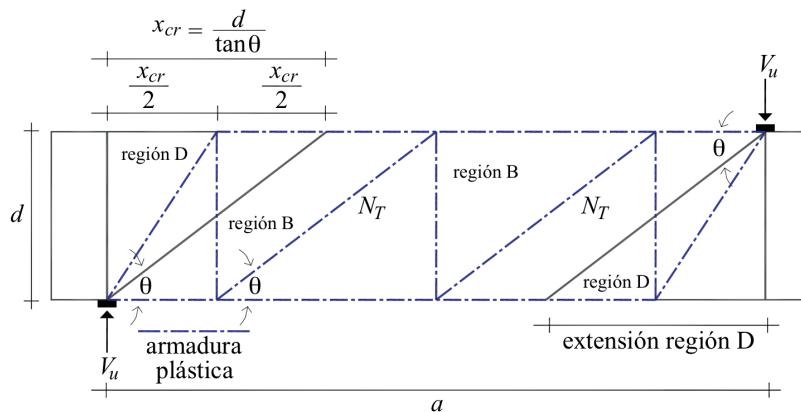


Fig. 10: Regiones B-D plásticas en un claro de cortante típico.

A partir de la Ecuación 1 se propone el parámetro λ_p (Ec. 2) para cuantificar la esbeltez plástica de las trabes con refuerzo transversal, donde a es el claro de cortante, θ el ángulo del campo de compresión diagonal supuesto en el diseño, y l_{BP} la longitud mínima del claro de cortante para que se desarrolle una región B plástica. De esta manera, una trabe con refuerzo transversal será esbelta sólo si $\lambda_p \geq 1$. Vale la pena mencionar que la solución original del modelo de armadura plástica acepta el intervalo $26.6^\circ \leq \theta \leq 63.4^\circ$ (Thürlimann 1979); sin embargo, en trabes esbeltas debe limitarse a $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ para tener congruencia con la contribución del concreto que se explica más adelante. Finalmente, en la Ecuación 3 se indica la relación que existe entre λ_p y el número de tableros de armadura (N_T) que se forman en la región B (Fig. 11). La Ecuación 3 también es válida para cargas distribuidas (Archundia 2013), y tiene mayor utilidad en la etapa de diseño que en la revisión de estructuras existentes.

$$N_T = 2\lambda_p - 1 \quad (3)$$

5. CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO, SECCIÓN CRÍTICA Y ESBELTEZ ELÁSTICA

En la sección anterior se presentó una definición para la sección crítica por cortante de trabes prismáticas con refuerzo transversal. La definición es compatible con el diseño por secciones del reglamento ACI-318 y con los métodos que se apoyan en campos de esfuerzo y modelos de armadura. La unificación de criterios obliga analizar las trabes sin refuerzo transversal con un criterio similar al utilizado en las trabes con estribos.

En la literatura existen propuestas que difieren al reglamento ACI-318 para calcular la resistencia de una trabe sin estribos, aunque muchas de ellas parecen estar más relacionadas con la resistencia última que con la contribución del concreto. De ellas fueron de interés: i) las que consideran implícita o explícitamente una sección crítica por cortante y, ii) las que utilizan modelos de armadura. Se hizo una selección de trabajos y se analizaron las aportaciones de Schlaich *et al.*, (1987), Kotsovos (1988), Reineck (1991), Kim y White (1991), Al-Nahlawi y Wight (1992), Zhang (1994), Nielsen (1999), Zararis y Papadakis (2001), Tureyen y Frosch (2003), Choi *et al.*, (2007), Muttoni y Fernández Ruiz (2008). Cada uno de estos trabajos se estudió específicamente para:

- 1) Determinar su afinidad con las limitantes de la contribución del concreto establecidas por el “Committee 326” (1962 a/b).
- 2) Valorar su congruencia con las regiones B-D sugeridas por Schlaich *et al.*, (1987).
- 3) Establecer alguna relación mecánica entre la sección crítica y la contribución del concreto.
- 4) Identificar alguna relación entre la sección crítica inherente al método y algún modelo de armadura.

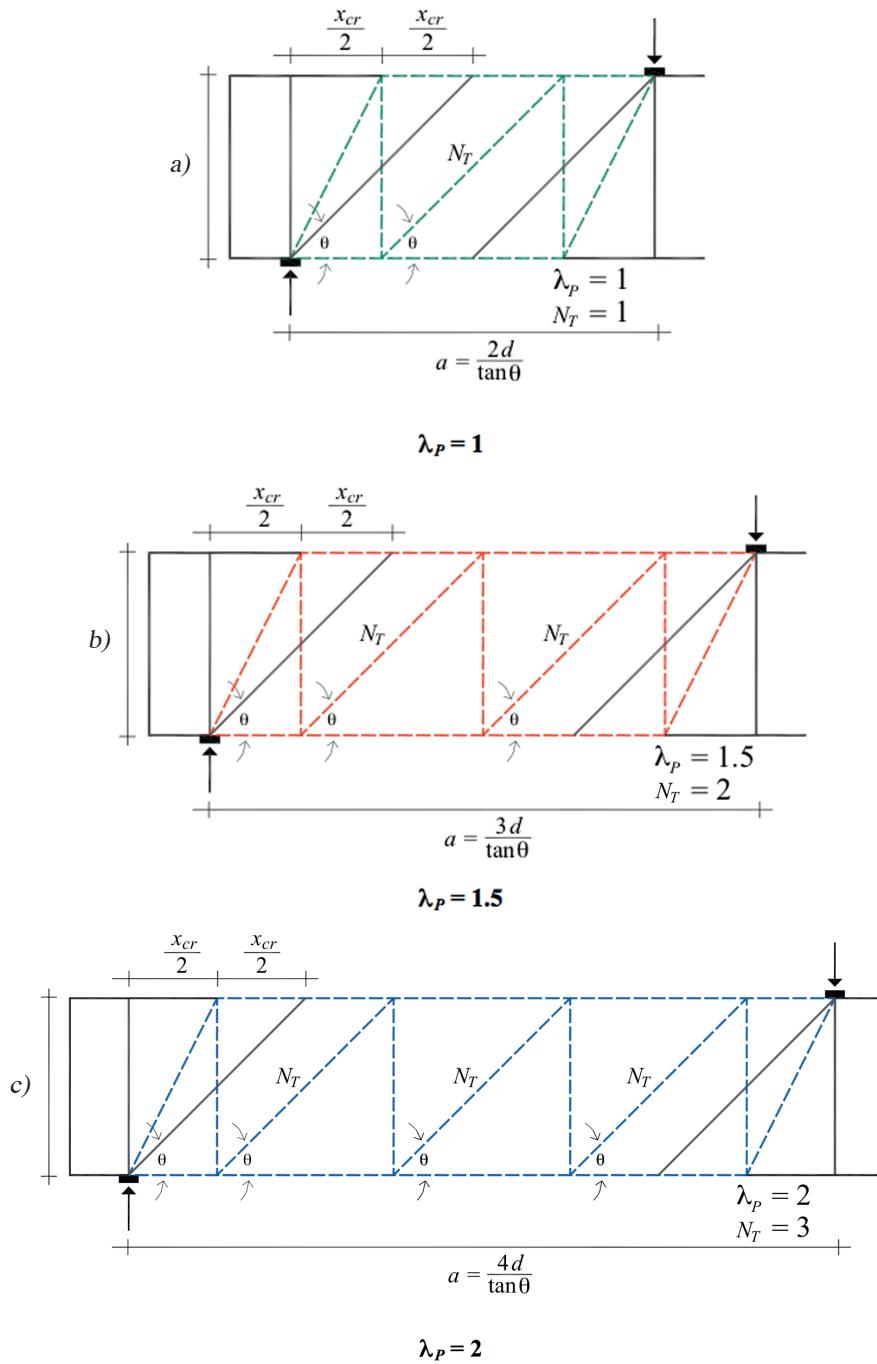


Fig. 11: Modelos de armadura plástica para diferentes valores de λ_p .

El análisis de estos trabajos permitió llegar a las siguientes conclusiones generales:

- a. No existe un modelo de armadura genérico para trabes esbeltas sin refuerzo transversal como lo es la armadura plástica para las trabes con estribos. Por ejemplo, la propuesta de Al-Nahlawi y Wight (1992) sólo funciona en relaciones a/d pares, y las de Zhang (1994), Nielsen (1999) y Muttoni y Fernández Ruiz (2008) usan el modelo de puntal directo para vigas cortas con modificaciones que lo ajustan a los resultados experimentales de vigas esbeltas.
- b. La contribución del concreto y la sección crítica por cortante sólo aplican en trabes con una relación $a/d > 2$ ("Committee 326" 1962 a/b), es decir, en elementos que tengan una sección B definida con métodos elásticos. La condición es obligatoria para que exista congruencia con el mecanismo de viga.
- c. El bloque de compresión no agrietado tiene una relación importante con la contribución del concreto después del agrietamiento por tensión diagonal (Kotsovov 1988, Kim y White 1991, Zararis y Papadakis 2001, Tureyen y Frosch 2003, Choi *et al.*, 2007).
- d. Una armadura con tensores de concreto es un mecanismo resistente válido para explicar la transición entre el estado no agrietado y el agrietado que justifica a la armadura plástica (Schlaich *et al.*, 1987, Reineck 1991). Cuando la respuesta de la armadura con tensores de concreto se limita al intervalo lineal, se tiene una armadura elástica que explica razonablemente el flujo de fuerzas asociado con la contribución del concreto. Como este mecanismo resistente desaparece con el agrietamiento por tensión diagonal pueden ignorarse las fuerzas de fricción en la entrecara de las grietas (de existir), y alguna aportación que se le pueda atribuir al acero de refuerzo longitudinal mediante el mecanismo de dovela.
- e. Así como se definió una sección crítica plástica con un modelo de armadura plástica, también se puede definir una sección crítica elástica con un modelo de armadura elástica. La última también debe tener un vínculo importante con la región B.
- f. La sección crítica asociada con la contribución del concreto se ubica a no menos de un peralte efectivo del apoyo o carga concentrada, pero no más allá de dos peraltes efectivos (Reineck 1991, Kim y White 1991, Zhang 1994, Nielsen 1999).

Los incisos "a" y "b" sólo permiten usar detalles de un modelo de armadura elástica. Por ejemplo, se puede proponer uno en la zona adyacente a un apoyo para estudiar la interacción entre las regiones B-D, y otro distinto para una región B. Para elaborar un modelo de armadura genérico para trabes con $a/d > 2$, sin incurrir en inconsistencias o ajustes semiempíricos, se requiere de mucho trabajo adicional.

La transición de armaduras indicada en el inciso "d" obliga a que exista alguna semejanza entre el modelo de armadura elástica y el de armadura plástica, lo que se resuelve si ambos modelos tienen algunos elementos estratégicos en común. Del mismo inciso "d" se define la finalización de la respuesta elástica con la aparición del agrietamiento por tensión diagonal, el cual es un indicador del vencimiento de la resistencia efectiva a tensión del concreto. Finalmente, los incisos "e" y "f" limitan el detalle del modelo de armadura adyacente a reacciones o cargas concentradas a una longitud no mayor a dos peraltes efectivos. Un detalle de armadura elástica para un tramo de elemento compuesto sólo de una región B no tiene esta limitante.

En la figura 12 se muestra una opción para explicar la transición entre los dos mecanismos resistentes secuenciales, no simultáneos, que rigen el diseño por cortante de las vigas de concreto reforzado: el primero elástico (contribución del concreto), y el segundo plástico (contribución del acero de refuerzo transversal). En efecto, en una trabe esbelta siempre se presenta la contribución del concreto pues el mecanismo de armadura plástica requiere que antes se haya desarrollado el agrietamiento por tensión diagonal. La transición entre armaduras en la región adyacente al apoyo se modela de manera simplificada atendiendo las siguientes instrucciones:

1. En el apoyo colocar un puntal idéntico al de un modelo de armadura plástica construido con un ángulo θ que pertenezca al intervalo $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$.
2. En el extremo superior del puntal del apoyo conectar un tensor de concreto con una inclinación θ . Este tensor se conecta en su extremo inferior con: i) la cuerda longitudinal de tensión y, ii) un puntal perpendicular a él mismo.

Por la construcción de los modelos la región D elástica coincide con la región D plástica (Fig. 12b). Esto genera un conflicto, pues en secciones previas se demostró que la extensión de la región D plástica no es rigurosamente la de una elástica como lo sugirieron Schlaich *et al.*, (1987). Asimismo, en esta sección se ha hecho énfasis en que la contribución

del concreto debe satisfacer las regiones B-D elásticas definidas por Schlaich y colaboradores. Este dilema se resuelve atendiendo las consideraciones del “Committee 326” (1962 a/b) sobre la falla por tensión diagonal y su relación con la contribución del concreto y la sección crítica. De acuerdo con este comité, el agrietamiento diagonal comienza a una profundidad de medio peralte en la sección ubicada a un peralte efectivo del apoyo. Para ser consistentes con esto, el ángulo que se debe usar en la construcción del modelo de armadura elástica sugerido en la figura 13 debe ser $\theta_E = 45^\circ$, donde el subíndice “E” es para asociar el ángulo con la armadura elástica y distinguirlo del ángulo que rige la construcción del modelo de armadura plástica (θ).

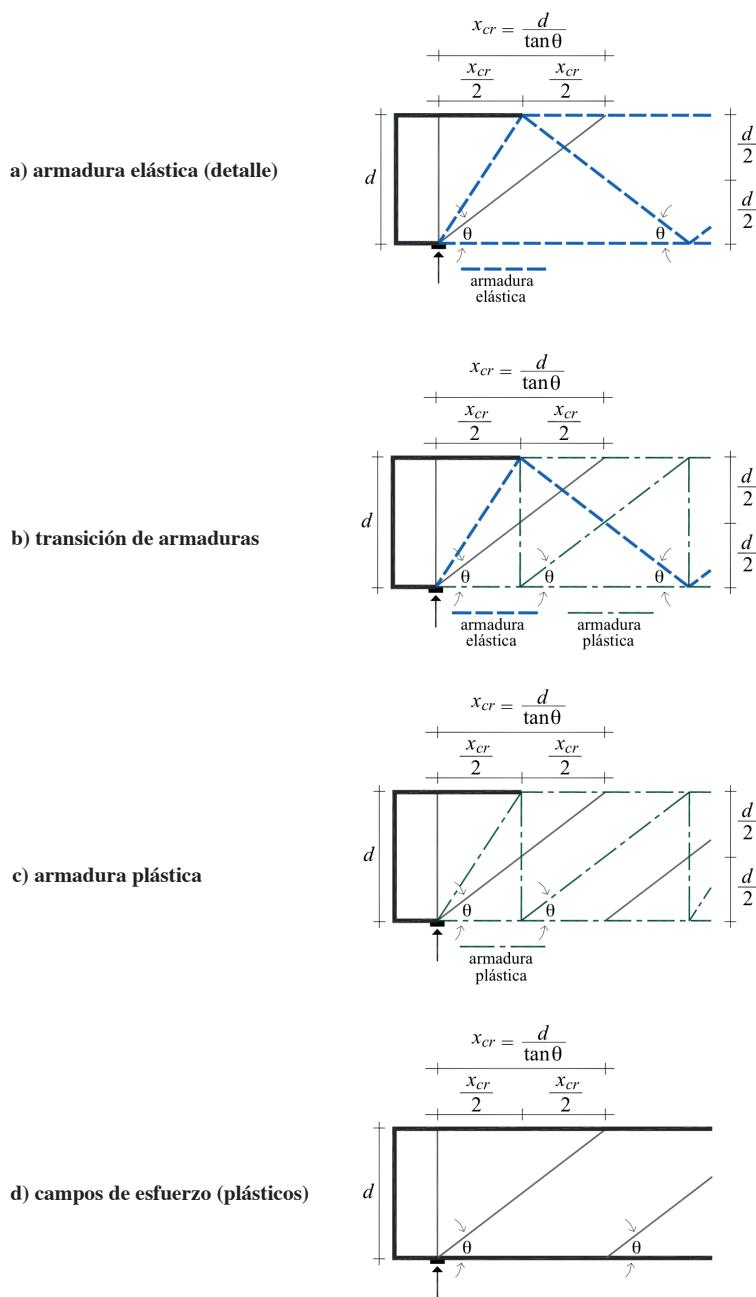


Fig. 12: Transición entre la armadura elástica y la armadura plástica.

Se hace notar que usar el ángulo $\theta_E = 45^\circ$ en la armadura elástica y $\theta = 45^\circ$ en la armadura plástica satisface la hipótesis del reglamento ACI-318 sobre la ubicación de la sección crítica en trabe sin y con refuerzo transversal, es decir, a un peralte efectivo del apoyo. Además, no existe ninguna inconsistencia si la trabe se diseña y detalla para desarrollar un campo de compresión diagonal con un ángulo $\theta < 45^\circ$, pues primero se presenta la contribución del concreto ($\theta_E = 45^\circ$) y, con el aumento de la carga, las grietas se desarrollan hasta llegar al ángulo θ asociado con la contribución del acero de refuerzo transversal. La explicación de lo que sucede en la trabe entre la contribución del concreto y la contribución del acero de refuerzo transversal está dividida en dos posturas: i) la que apoya la idea de que la trabazón de agregado contribuye en la resistencia (por ejemplo, Vecchio y Collins 1986, Reineck 1991, Fernández y Muttoni 2008) y, ii) la que privilegia el trabajo del bloque de compresión no agrietado (por ejemplo, Kotsovos 1988, Kim y White 1991, Tureyen y Frosch 2003). De acuerdo con el “Committee 326” (1962 a/b), la contribución del concreto se relaciona con la grieta de tensión diagonal y con el bloque de compresión no agrietado. En reportes posteriores ya se le dio importancia a la trabazón de agregado y al mecanismo de dovela (“Committee 426” 1973, “Committee 445” 1998).

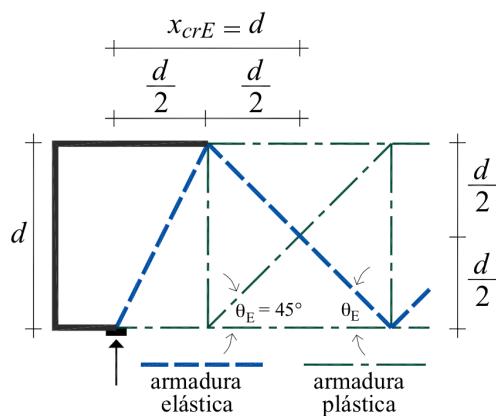
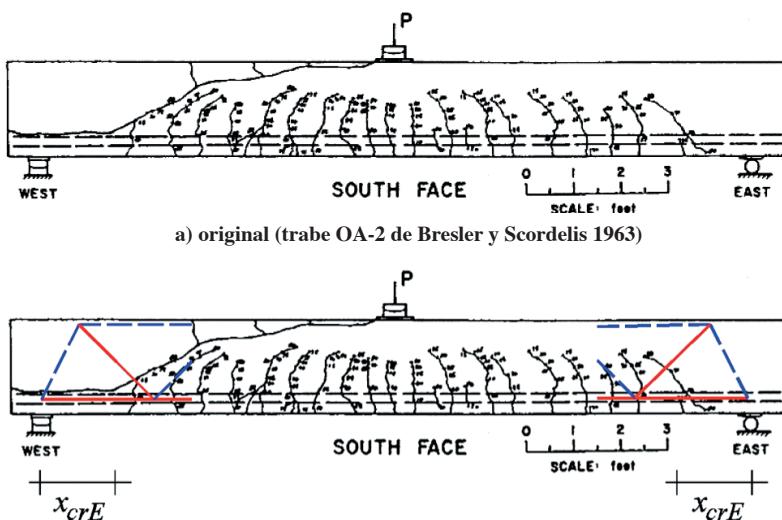


Fig. 13: Ubicación de la sección crítica elástica.

Finalmente, y a manera de definición, la sección crítica por cortante relacionada con la contribución del concreto se ubica a una distancia de un peralte efectivo del apoyo (d), y es la frontera entre las regiones B y D elásticas. En dicha sección el tensor de concreto adyacente al apoyo se rompe en su longitud media debido a la grieta de tensión diagonal (Fig. 14).



b) detalle de modelo de armadura indicando la ubicación de la sección crítica.

Fig. 14: Ruptura del tensor de concreto en la sección crítica elástica ($a/d = 4.9$).

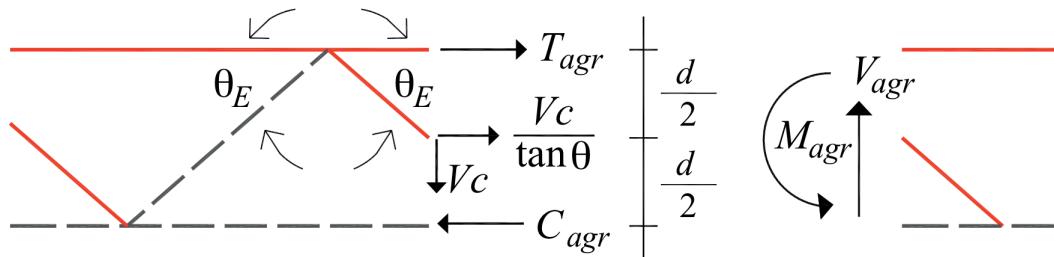


Fig. 15: Detalle de armadura elástica para una región B.

En la figura 15 se presenta un detalle de armadura elástica para una región B. Esta armadura es idéntica a la que presentaron Schlaich *et al.*, (1987) para explicar por qué los estribos no trabajan hasta después del agrietamiento diagonal, lo que justificaron con la trabazón del agregado en la entrecara del agrietamiento; sin embargo, Schlaich y colaboradores sólo le dieron un carácter cualitativo al modelo. En párrafos anteriores se explicó que los campos de esfuerzo antes del agrietamiento por tensión diagonal pueden representarse con un modelo de armadura elástica en el que no existen fuerzas debidas a la trabazón del agregado. Al resolver el modelo de la figura 15 suponiendo que V_{agr} es el cortante que ocasiona el agrietamiento por tensión diagonal, se obtienen las Ecuaciones 4 a 6, donde V_c es la contribución del concreto, C_{agr} la demanda del bloque de compresión, T_{agr} la demanda en el acero en tensión, d el peralte efectivo y θ_E la inclinación de los campos de esfuerzo elásticos ($\theta_E = 45^\circ$).

Al comparar la solución de la armadura elástica contra: i) la de la armadura plástica (Ecs. 7 a 9), donde V_u y M_u son, respectivamente, las demandas de cortante y momento asociadas con la contribución del acero de refuerzo transversal, θ el ángulo de inclinación de los campos de compresión diagonal, C la demanda en la cuerda de compresión, T la demanda en la cuerda de tensión, y V_s la contribución de los estribos y, ii) la teoría de vigas (Ecs. 10 a 12), donde V y M son, respectivamente, las demandas de cortante y momento en cualquier estado de carga, C_{tv} la demanda en la cuerda de compresión y T_{tv} la demanda en la cuerda de tensión, se llega a las siguientes conclusiones:

- a. El cortante no depende del nivel de agrietamiento, es decir, es una fuerza que se obtiene por estática.
- b. El comportamiento de las cuerdas longitudinales en tensión y compresión depende del agrietamiento.
- c. La teoría de vigas no es adecuada para explicar el comportamiento de las trabes de concreto reforzado, aún en el intervalo elástico.
- d. El cortante afecta la demanda de las cuerdas longitudinales en tensión y compresión de manera contraria antes y después de la falla por tensión diagonal.
- e. La solución de la armadura elástica sugiere que después del agrietamiento diagonal, la contribución del concreto es transferida súbitamente a otro mecanismo resistente en el que el bloque de compresión no agrietado tiene importancia relevante, posiblemente uno como el propuesto por Kotsovos (1988 y 2007).
- f. Los métodos de diseño que usan una contribución del concreto en función de la demanda en la cuerda de tensión estimada con la teoría de vigas o la armadura plástica (por ejemplo, Collins *et al.*, 1996, Bentz 2006, Collins *et al.*, 2007, Sigrist 2011) merecen una revisión que está fuera del alcance de este trabajo.

$$V_c = V_{agr} \quad (\text{armadura elástica}) \quad (4)$$

$$C_{agr} = \frac{M_{agr}}{d} + \frac{V_{agr}}{2 \tan \theta_E} \quad (5)$$

$$T_{agr} = \frac{M_{agr}}{d} - \frac{V_{agr}}{2 \tan \theta_E} \quad (6)$$

$$V_s = V_u \quad (\text{armadura plástica}) \quad (7)$$

$$C = \frac{M_u}{d} - \frac{V_u}{2 \tan \theta} \quad (8)$$

$$T = \frac{M_u}{d} + \frac{V_u}{2 \tan \theta} \quad (9)$$

$$V = V \quad (\text{teoría de vigas}) \quad (10)$$

$$C_{tv} = \frac{M}{d} \quad (11)$$

$$T_{tv} = \frac{M}{d} \quad (12)$$

Así como se propuso el parámetro λ_p para cuantificar la esbeltez plástica (Ec. 2), también se propone para determinar la esbeltez elástica (Ec. 13). Este parámetro no es exclusivo de tráves sin estribos pues también aplica en las tráves con refuerzo transversal. En ambos casos λ_E indica si es válido usar la contribución del concreto, lo que sucede sólo si $\lambda_E \geq 1$. En la Ecación 13 l_{BE} es la longitud mínima del claro de cortante para que se pueda desarrollar una región B asociada con campos de esfuerzo elásticos con un ángulo de inclinación $\theta_E = 45^\circ$, a el claro de cortante, y d el peralte efectivo de la tráve. En efecto, λ_E se relaciona con los resultados de Kani (1964) si se acepta que $a/d = 2$ es la frontera que divide el predominio de los mecanismos de arco y viga (Fig. 6). Como regla general: si una tráve es plásticamente esbelta ($\lambda_p \geq 1$) para el intervalo $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ también es elásticamente esbelta ($\lambda_E \geq 1$).

$$\lambda_E = \frac{a}{l_{BE}} = \frac{a}{2d} \quad (13)$$

La dificultad para elaborar un modelo de armadura elástica genérico para tráves esbeltas puede estar relacionado con el hecho de que, para explicar el agrietamiento por tensión diagonal, se requiere que la región B sea modelada con campos de esfuerzo elásticos con inclinación fija, por ejemplo, en este trabajo se justificó el ángulo $\theta_E = 45^\circ$ que es diferente a $\theta_E = 30^\circ$ sugerido por Reineck (1991). Esta situación no existe en un modelo de armadura plástica, donde la inclinación de los campos de esfuerzo puede ajustarse dentro de cierto intervalo para facilitar la construcción del modelo. Esta situación podría estar relacionada con el efecto del tamaño identificado por Kani (1967), en el sentido de que la longitud del claro de cortante favorezca o no la formación de tableros de armadura completos para un ángulo fijo θ_E , y sea esto lo que modifique el comportamiento de las tráves y no sólo el valor absoluto del tamaño del peralte. En efecto, se presume que es un asunto más de proporción que de dimensiones absolutas.

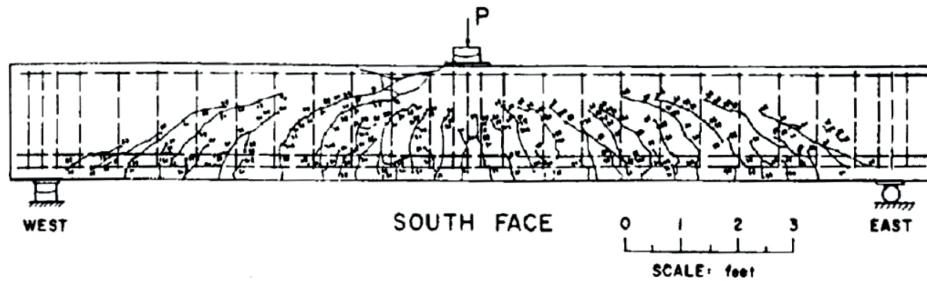
6. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para demostrar el potencial de los conceptos desarrollados, éstos se aplicaron en la tráve A-2 de Bresler y Scordelis (1963). Es importante mencionar, que la serie experimental a la que pertenece este elemento es la que sustenta la ecuación simplificada del reglamento ACI-318 para calcular la contribución del concreto (Ec. 14).

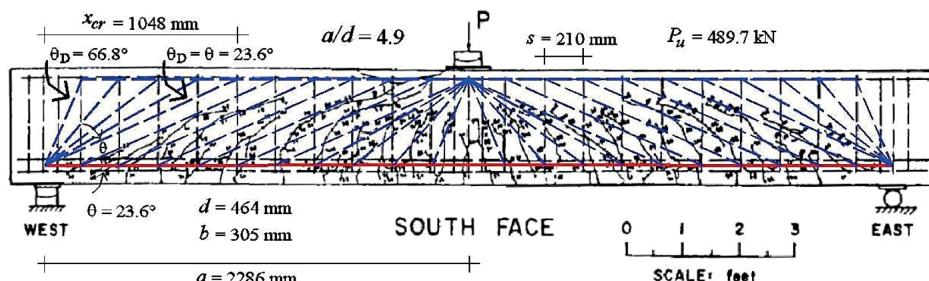
$$V_c = 0.17 \sqrt{f'_c} bd \quad (\text{MPa}) \quad (14a)$$

$$V_c = 2\sqrt{f'_c} bd \quad (\text{lb/plg}^2) \quad (14b)$$

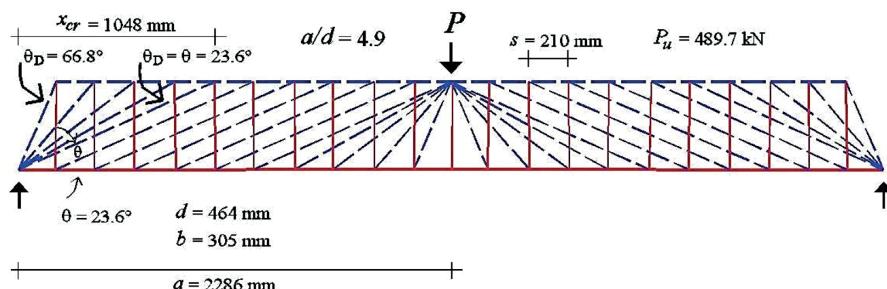
En la figura 16a se muestra el agrietamiento a la falla del elemento A-2. La trabe presentó una carga de falla $P_u = 489.7 \text{ kN}$ (110 klb) que representa un cortante de falla $V_u = 244.9 \text{ kN}$ (55 klb) muy parecido a su resistencia calculada a flexión $V_f = 242 \text{ kN}$ (54.3 klb). Con base en: i) la resistencia medida en los materiales, ii) la contribución del concreto calculada con la Ecuación 14 y, iii) la contribución del acero de refuerzo transversal del reglamento ACI-318 (armadura plástica con $\theta_E = 45^\circ$), Bresler y Scordelis (1963) predijeron para el elemento A-2 una resistencia $V_{BS} = 163.4 \text{ kN}$ (36.7 klb). Al comparar su pronóstico contra el resultado experimental, Bresler y Scordelis concluyeron que el elemento tuvo una reserva de resistencia a cortante del 50 % ($244.9 / 163.4 = 1.5$), lo que atribuyeron al mecanismo de dovela y a una mayor eficiencia del trabajo de los estribos.



a) patrón de agrietamiento original.



b) modelo de armadura plástica sugerido (superpuesto).



c) modelo de armadura plástica sugerido (aislado).

Fig. 16: Elemento A-2 ensayado por Bresler y Scordelis (1963).

En las figuras 16 b/c se muestra un bosquejo de los campos de esfuerzo del elemento A-2 de Bresler y Scordelis (1963). La propuesta se obtuvo considerando el patrón de agrietamiento y la distribución de estribos para delinear un campo de compresión diagonal (región B) en el que el ángulo de inclinación se ajustara al intervalo $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$. En la figura 17 se muestra un detalle del apoyo, donde los ángulos θ_D son exclusivos de los puntales radiales que dan forma al abanico de compresión (región D). De esta manera, la frontera o línea de discontinuidad entre el campo de compresión diagonal y el radial es un puntal con inclinación $\theta = \theta_D$. Las características de estos campos de esfuerzo y la línea de discontinuidad entre ellos pueden consultarse en Nielsen (1999).

$$\lambda_p = \frac{a(\tan \theta)}{2d} = \frac{2286(\tan 23.6^\circ)}{2(464)} = 1.08 > 1 \quad (15)$$

$$x_{cr} = \frac{d}{\tan \theta} = \frac{464}{\tan 23.6^\circ} = 1062 \text{ mm} \quad (16)$$

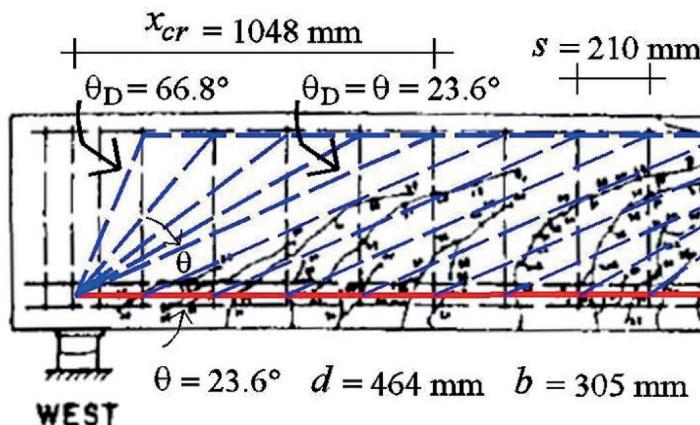


Fig. 17: Detalle del abanico de compresión sugerido para la trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963).

El bosquejo de los campos de esfuerzo viola el límite inferior especificado ($\theta = 23.6^\circ < 26.6^\circ$); sin embargo, su ajuste con el agrietamiento lo justifica. Además, algunas propuestas de diseño aceptan ángulos algo menores; por ejemplo, en el reglamento CEB-FIP-90 se permite $\theta = 18.4^\circ$. Pasando por alto esta situación, ¿los campos de esfuerzo propuestos para la trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963) permiten construir una armadura plástica? Tomando en cuenta que el claro de cortante (a) tiene una longitud de 2286 mm (90 plg) y que el peralte efectivo (d) tiene 464 mm (18.27 plg), la interrogante se responde evaluando el parámetro λ_p presentado en este trabajo. En la Ecuación 15 se muestra este cálculo, del que se deduce que, como $\lambda_p \geq 1$, entonces el elemento A-2 desarrolló un mecanismo de armadura plástica con un campo de compresión diagonal $\theta = 23.6^\circ$. Lo que también se debe verificar, es si la extensión de las regiones D del modelo propuesto se ajusta razonablemente a la teórica. Esta revisión se muestra en la Ecuación 16, cuyo resultado indica que la proyección horizontal de las regiones D es ligeramente mayor a la mostrada en la figura 17 ($x_{cr} = 1048$ mm).

$$V_s = \frac{A_v f_y w d}{s \tan \theta} = \frac{21(464)}{210(\tan 23.6^\circ)} = 106.2 \text{ kN} \quad (17)$$

El modelo satisface los requisitos geométricos de una armadura plástica, por lo que es válido calcular su resistencia a cortante, lo que debe entenderse como la contribución del acero de refuerzo transversal exclusiva de la región B.

Para ello sólo se requiere conocer la resistencia de cada estribo y su separación. De acuerdo con Bresler y Scordelis (1963) cada estribo tiene una resistencia $A_f_{yw} = 21 \text{ kN}$ (4.72 klb) y una separación $s = 210 \text{ mm}$ (8.25 plg). El cálculo de la resistencia del mecanismo de armadura se muestra en la Ecuación 17, la cual representa sólo el 43 % de la observada en el experimento ($106.2 / 244.9 = 0.43$). Para mejorar la predicción se podrían atender las recomendaciones de MacGregor (1997), y construir un modelo de tal forma que el cortante último se equilibre con los estribos que sean necesarios, lo que obligaría configurar los abanicos de compresión con 12 estribos ($244.9 / 21 = 11.7$); sin embargo, la solución generaría un modelo con un campo de compresión diagonal que no se podría justificar con el patrón de agrietamiento ($\theta < 23.6^\circ$). Otra opción es tomar en cuenta la contribución del concreto (V_c).

Como se comentó en la sección previa, para incluir la contribución del concreto es condición suficiente que se cumpla la relación $a/d > 2$. Puesto que la viga A-2 de Bresler y Scordelis tiene una relación $a/d = 4.9$ se puede incluir sin ninguna reserva. Sin embargo, y para usar todas las herramientas presentadas en este trabajo, en la Ecuación 18 se confirma que $\lambda_E \geq 1$. El cálculo de la contribución de concreto se muestra en la Ecuación 19, donde $f'_c = 24.3 \text{ MPa}$ (3520 lb/plg²), $d = 464 \text{ mm}$ (18.27 plg) y $b = 305 \text{ mm}$ (12 plg). Finalmente, la resistencia (V_R) estimada para la trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963) es la suma de la resistencia de la armadura plástica (Ec. 17) y de la contribución del concreto (Ec. 19) según se muestra en la Ecuación 20.

$$\lambda_E = \frac{a}{2d} = \frac{2286}{2(464)} = 2.5 > 1 \quad (18)$$

$$V_c = 0.17\sqrt{24.3}(305)(464) = 118.6 \text{ kN} \quad (19)$$

$$V_R = V_s + V_c = 106.2 + 118.6 = 224.8 \text{ kN} \quad (20)$$

La resistencia mostrada en la Ecuación 20 es el 92 % de la reportada por Bresler y Scordelis (1963) para el elemento A-2 ($224.8 / 244.9 = 0.92$). La estimación es aceptable y cumple con el teorema del límite inferior de la teoría de la plasticidad, pues ambas contribuciones están justificadas con modelos de armadura. Finalmente, ¿Qué se puede concluir, y qué enseñanzas deja esta solución? A entender de los autores, son las siguientes:

1. La trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963) no desarrolló el mecanismo de armadura implícito en el reglamento ACI-318, es decir, uno justificado con campos de esfuerzo de compresión diagonal con un ángulo de inclinación $\theta = 45^\circ$. Por lo tanto, es difícil aceptar que haya presentado una reserva de resistencia del 50 % atribuible al mecanismo de dovela y a una mayor eficiencia de los estribos.
2. Los resultados del análisis presentado sugieren que la distribución de estribos fomentó un modelo de armadura plástica asociado a un campo de compresión diagonal con una inclinación muy parecida a $\theta = 23.6^\circ$.
3. Los campos de esfuerzo propuestos para la trabe A-2 explican razonablemente el patrón de agrietamiento por cortante, principalmente en la región B cercana a los apoyos donde el momento flexionante fue pequeño. A medida que el momento flexionante es más grande, es decir, al acercarse al punto de carga, la mitad superior de las grietas también se ajusta bien a la inclinación del campo de compresión diagonal, aunque en su parte inferior no tanto debido a la flexión, lo que se puede explicar con el hecho de que la capacidad a flexión de la viga ($V_f = 242 \text{ kN}$) fue similar a la de cortante ($V_u = 244.9 \text{ kN}$).
4. De acuerdo con Bresler y Scordelis (1963), el área de contacto entre el elemento A-2 y cada uno de los apoyos fue de 38710 mm^2 (60 plg²). Como el cortante último fue $V_u = 244.9 \text{ kN}$, entonces el esfuerzo de contacto en la base fue $\sigma_b = 6.3 \text{ MPa}$ que es el 26 % de la resistencia del concreto ($f'_c = 24.3 \text{ MPa}$). Este nivel de esfuerzo es sustancialmente menor al sesenta por ciento de la resistencia del concreto que han recomendado algunos investigadores para hacer prediseños o revisiones rápidas (por ejemplo, Martí 1985/a/b, Rogowsky y MacGregor 1986), y puede explicar que en la zona de los apoyos no se haya presentado una falla por aplastamiento y agrietamiento radial.
5. Cuando Bresler y Scordelis (1963) hicieron sus experimentos apenas se empezaban a conocer las bondades y limitantes del método de diseño por cortante del reglamento ACI-318. No menos importante, es que no se había desarrollado el modelo de armadura plástica (por ejemplo, Thürlmann 1979). Por ello, el trabajo de Bresler y Scordelis (1963) debe ser considerado como uno adelantado a su época.

6. Previamente, Vecchio analizó los experimentos de Bresler y Scordelis (1963) para calibrar sus programas de elemento finito no lineal; sin embargo, usó propiedades distribuidas del acero de refuerzo para: i) predecir la resistencia (Vecchio 2000) y, ii) reproducir las curvas carga-deflexión (Vecchio y Shim 2004). Es de esperar que modelos de elemento finito no lineal donde todo el acero de refuerzo se modele con elementos tipo barra (Fernandez Ruiz y Muttoni 2007) reproduzca los campos de esfuerzo que sustentan el modelo de armadura presentado para el elemento A-2.

7. SEUDOESBELTEZ

El análisis de la trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963) muestra una situación a la que no se le ha prestado la debida atención: la interdependencia entre los modelos de armadura plástica, las regiones B-D, y la distribución de estribos. Como se demuestra en esta sección, si no existe congruencia entre ellos es difícil que se pueda tener algo de certeza sobre el comportamiento de una trabe de concreto reforzado. En este contexto, la configuración de los abanicos de compresión tiene importancia relevante (Rogowsky y MacGregor 1983).

La extensión teórica de las regiones D, adyacentes a la reacción o carga concentrada de una trabe esbelta, es $x_{cr} = d/\tan \theta$ (Fig. 8). Sin embargo, pierde sentido calcular esta longitud si en el diseño no se tiene cuidado de que los abanicos de compresión queden dentro de ella. Por ejemplo, en la figura 18 se muestra un ejemplo clásico de la literatura para explicar el funcionamiento de los modelos de armadura. Ese modelo fue construido para un campo de compresión diagonal con un ángulo de inclinación $\theta = 33.7^\circ$, pero en la figura 18 se demuestra que la proyección horizontal de la región D no tiene correspondencia con: i) la definición de Schlaich *et al.*, (1987), ii) la que se deduce del propio modelo (puntal RJ) y, iii) la que se propone en este trabajo.

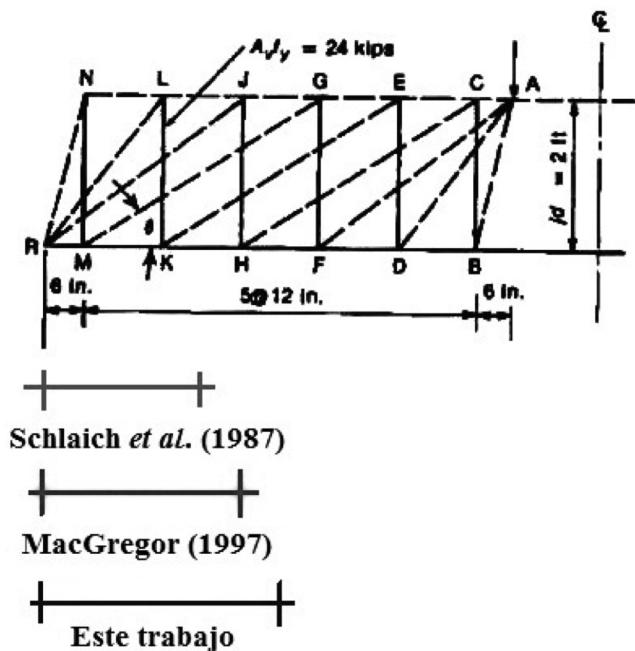


Fig. 18: Análisis de un abanico de compresión sugerido por MacGregor (1997).

En secciones previas se demostró que la extensión de la región D sugerida por Schlaich *et al.*, (1987) está anclada al ángulo $\theta = 45^\circ$, por lo que no tiene sentido tomarla como referencia en un modelo con $\theta = 33.7^\circ$. Por ello, se concluye que los estribos que dan forma al abanico de compresión mostrado en la figura 18 cubren menos distancia de la que obliga un modelo de armadura típico. Esta distribución de estribos de alguna manera debe tener consecuencias estructurales, por ejemplo, es posiblemente que genere un nivel de esfuerzo en el apoyo que favorezca una falla por aplastamiento. Un análisis preliminar de los experimentos realizados por Lee y Hwang (2010) sugiere que esto puede suceder (Archundia 2013).

Por otro lado, ¿Qué ocurre cuando los estribos dentro de la distancia $x_{cr} = d/\tan\theta$ son insuficientes para equilibrar las reacciones o cargas concentradas? En la literatura se han detectado algunos ejemplos y se ha podido diagnosticar su efecto. Por restricción de espacio sólo se presenta el más drástico de ellos, los otros pueden consultarse en Archundia (2013).

En la figura 19 se muestran las dimensiones y el armado de las trabes V1 y V2 estudiadas por Frosch (2000). Con estos elementos Frosch estudió el nivel de seguridad que ofrece la cuantía mínima de refuerzo transversal del reglamento ACI-318. Las trabes tienen una relación $a/d = 3$ que, de acuerdo con Frosch (2000), favorece una resistencia a cortante baja. No es muy claro este argumento pero, tal vez, esté asociado con los resultados de Kani mostrados figura 6a pero que son exclusivos para trabes sin estribos. Lo importante es que las trabes tienen una relación $a/d > 2$ que las clasificadas como esbeltas según la práctica vigente (por ejemplo, "Committee 445" 1998).

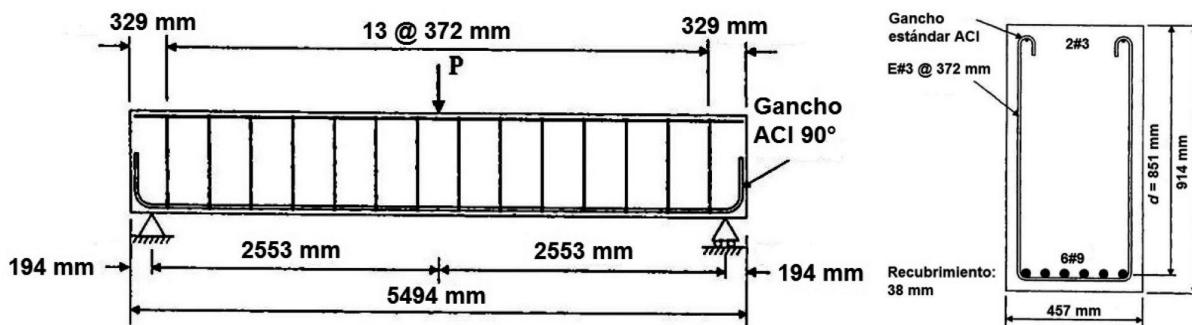


Fig. 19: Geometría y armados de las trabes V1 y V2 estudiadas por Frosch (2000). Modificada.

Las propiedades de los materiales en ambos elementos fueron: esfuerzo de fluencia del acero transversal $f_{yw} = 483$ MPa (70 klb/plg²), del acero longitudinal $f_y = 476$ MPa (69 klb/plg²) y resistencia del concreto $f'_c = 36.6$ MPa (5300 lb/plg²). Las trabes se sometieron a carga monotónica, y el cortante de falla del elemento V1 es $V_{u-1} = 394.9$ kN (88.7 klb) y del elemento V2 es $V_{u-2} = 492.4$ kN (110.6 klb). Los patrones de agrietamiento se muestran en la figura 20. Con base en los patrones de agrietamiento y la longitud de desarrollo de los estribos, Frosch (2000) determinó que en la trabe V1 sólo un estribo participó en la resistencia a cortante (estribo 4, figura 20a), y que en el elemento V2 dos estribos trabajaron (estribos 4 y 5, Fig. 20b). Con estos resultados Frosch (2000) emitió recomendaciones de diseño que después fueron ampliadas en Tompos y Frosch (2002).

En estos experimentos hay dos cosas que llamaron la atención de los autores: i) la poca cantidad de estribos que participa en el mecanismo resistente y, ii) que los patrones de agrietamiento son típicos de la falla en trabes sin refuerzo transversal. Puntualmente: el patrón de agrietamiento de las trabes V1 y V2 no proporciona evidencia contundente de la formación de campos de esfuerzo relacionados con el refuerzo transversal. Esto es más claro cuando se compara la resistencia experimental contra la contribución del concreto que predicen las dos opciones del reglamento ACI-318 (fórmulas simplificada y formal, Tabla 1).

Tabla 1: Contribución del concreto en los experimentos de Frosch (2000), kN.

Elemento	V_u	V_{c-1} (simplificada)	V_{c-2} (formal)	V_{c-1} / V_u	V_{c-2} / V_u
V1	394.9	390.9	438.5	0.99	1.11
V2	492.4	390.9	438.5	0.79	0.89
		Promedio		0.89	1.00
		Desviación		0.14	0.16

$$V_s = \frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta} = \frac{68.6(851)}{372(\tan 45^\circ)} = 156.9 \text{ kN} \quad (21)$$

En la Ecuación 21 se calcula la contribución del acero de las trabes V1 y V2 conforme al reglamento ACI-318, donde la resistencia de cada estribo es $A_v f_{yw} = 68.6 \text{ kN}$ (15.4 klb), el peralte $d = 851 \text{ mm}$ (33.5 plg) y la separación de estribos $s = 372 \text{ mm}$ (14.63 plg). Como se esperaba, esta resistencia tampoco explica por sí misma la resistencia experimental, y tampoco tiene sentido sumarla a los valores presentados en la Tabla 1. Toda la evidencia sugiere que los estribos de las trabes esbeltas de Frosch (2000) realmente no trabajaron pero, ¿Cómo explicarlo? Se puede argumentar que el refuerzo mínimo por cortante no está obligado a favorecer el mecanismo de armadura; sin embargo, Schlaich *et al.*, (1987) dejaron en claro que sí debe cumplir esta función. También los comentarios del reglamento ACI-318 sobre su cuantía mínima apoyan esta idea.

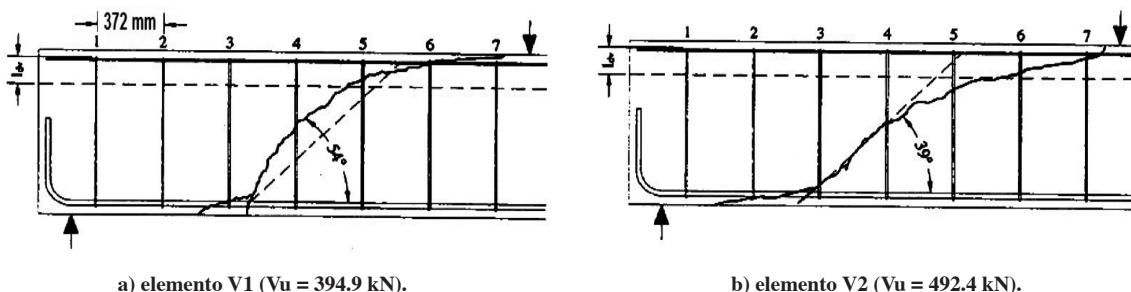


Fig. 20: Patrones de agrietamiento a la falla en los experimentos de Frosch (2000).
Tomada de Tompos y Frosch (2002). Modificada.

El análisis que se presenta se sustenta en la hipótesis de que al presentarse la falla por tensión diagonal que justifica la contribución del concreto, la distribución de estribos permite la formación de un modelo de armadura capaz de tomar esa demanda. Posteriormente, y con el aumento de la carga, la redistribución de fuerzas internas le permite al modelo rotar hasta configurar la armadura plástica que justifica la contribución del acero de refuerzo. Esta hipótesis es congruente con la secuencia de mecanismos resistentes mostrada en la figura 12.

Lo primero que se debe hacer es verificar si las trabes tienen la geometría necesaria para ser esbeltas. Esto se hace con la Ecuación 22, en la que todos los términos son conocidos salvo el claro de cortante que tiene una longitud $a = 2553 \text{ mm}$ (100.5 plg). Como Frosch (2000) utilizó el refuerzo mínimo recomendado por el reglamento ACI-318, entonces el cálculo se debe hacer con $\theta = 45^\circ$. El resultado mostrado en la Ecuación 22 confirma que la geometría de las trabes de Frosch (2000) permitía el desarrollo del campo de compresión diagonal supuesto en el reglamento ACI-318, lo que justifica calcular la extensión de los abanicos de compresión en el claro de cortante con la Ecuación 23.

$$\lambda_p = \frac{a(\tan \theta)}{2d} = \frac{2553(\tan 45^\circ)}{2(851)} = 1.5 \geq 1 \quad (22)$$

$$x_{cr} = \frac{d}{\tan \theta} = \frac{851}{\tan 45^\circ} = 851 \text{ mm} \quad (23)$$

En este punto de la revisión es necesario estimar la cantidad de estribos que se requieren para equilibrar las reacciones de las vigas. Para ello, basta dividir el cortante último entre la resistencia de cada estribo, que es $A_v f_{yw} = 68.6 \text{ kN}$ (15.4 klb). De esta manera, en la trabe V1 se requieren seis estribos ($394.9 / 68.6 = 5.76$) y en la trabe V2 siete estribos ($492.4 / 68.6 = 7.18$). Por simetría, estas cantidades también se requieren en los abanicos de compresión que tributan la carga a cada claro de cortante. Al cotejar la disponibilidad de estribos en ambas trabes, se observa que los estribos requeridos cubren la mayor parte del claro de cortante. En la figura 21 se muestra esto gráficamente, donde la distancia “requerida” es la calculada en la Ecuación 23, y la “fomentada” la que exige el equilibrio interno de la trabe V1.

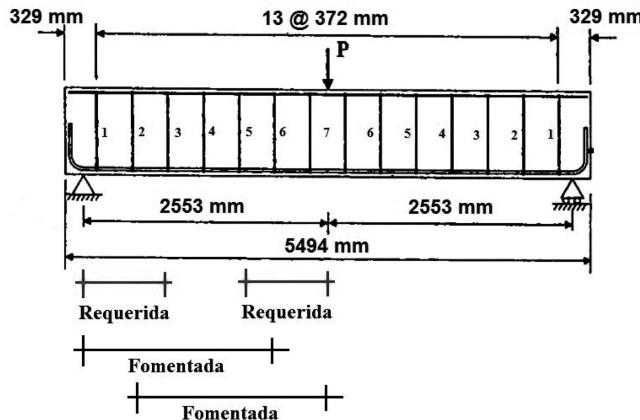


Fig. 21: Extensión de la región D en las trabes de Frosch (2000). Modificada.

Con base en estos resultados, se puede decir que la ausencia de estribos suficientes dentro de las regiones D teóricas extendió el disturbio en el claro de cortante y minimizó, o desapareció, la región B que debe dominar el comportamiento de una trabe esbelta. Esta situación es grave, pues pone de manifiesto que el no hacer el detallado de las regiones D de manera consistente con un modelo de armadura plástica, puede hacer que una trabe potencialmente esbelta esté limitada, o impeditida, para desarrollar la contribución del acero de refuerzo transversal supuesta en el diseño. A esta anomalía estructural se le ha dado el nombre de seudoesbeltez (Archundia 2013).

$$V_s = 6A_{v,f_{yw}} = 6(68.6) = 411.6 \text{ kN} \quad (24)$$

$$V_s = \frac{A_{v,f_{yw}}d}{s \tan \theta} = \frac{68.6(851)}{372(\tan 20.9^\circ)} = 411 \text{ kN} \quad (25)$$

En la figura 22 se presenta el mejor modelo de armadura plástica que se pudo construir para las trabes de Frosch (2000). El modelo involucra dos abanicos de compresión en el claro de cortante con seis estribos cada uno. De esta manera, la armadura consta de dos regiones D que dejan espacio para un diminuto campo de compresión diagonal con un ángulo de inclinación $\theta = 20.9^\circ$. Esta armadura enfatiza un mecanismo de arco cuya resistencia es igual al producto de la capacidad de cada estribo multiplicada por el número de ellos en cada abanico (Ec. 24). En efecto, esta resistencia es prácticamente igual a la del mecanismo de viga que podría justificarse con el diminuto campo de compresión diagonal (Ec. 25), lo que no debe sorprender, pues ambos mecanismos involucran seis estribos.

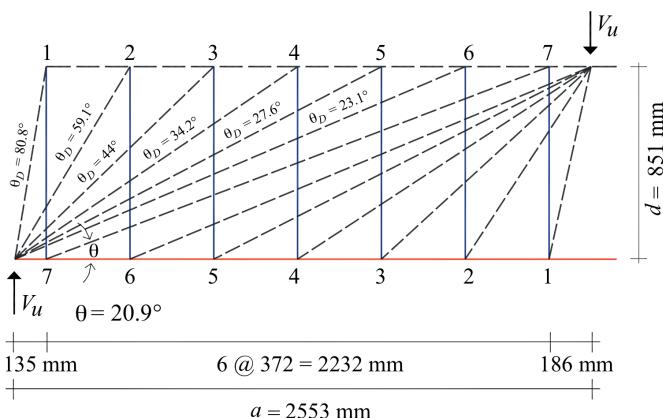
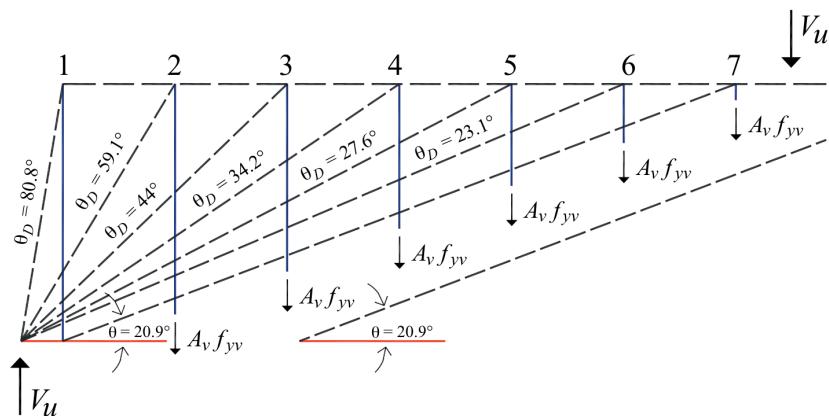
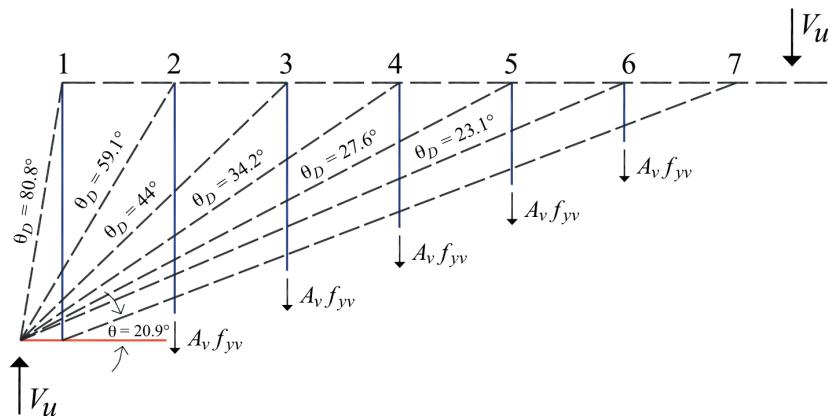


Fig. 22: Modelo de armadura sugerido para las trabes de Frosch (2000).

En un modelo de armadura típico, el número de estribos en los abanicos de compresión (región D) debe ser igual al de cada tablero de armadura que da forma de campo de compresión diagonal (región B). Para ello, en el campo de compresión diagonal sólo deben considerarse los estribos que están en una franja de concreto delimitada por dos “grietas” paralelas (Fig. 23a) y no los que son cruzados por una “grieta” diagonal (Fig. 23b). Al proceder de esta manera: i) se equilibra verticalmente el campo de compresión diagonal con el acero de refuerzo transversal, como lo exige el modelo de armadura plástica y, ii) no se requiere la fuerza de fricción en la entrecara de la grieta para obtener el equilibrio, como lo sugiere Collins (1998). Se hace énfasis de que este procedimiento no ignora la contribución del concreto pues, como se justificó en secciones previas, después del agrietamiento por tensión diagonal esta resistencia depende de un mecanismo asociado al bloque de compresión no agrietado.



a) correcto: en una franja diagonal.



b) incorrecto: en la grieta diagonal.

Fig. 23: Equilibrio vertical de un campo de compresión diagonal.

Con base en estos resultados, se concluye que el arreglo de estribos en las trabes de Frosch (2000) fomentó regiones D muy extendidas en el claro de cortante que favorecieron un mecanismo de armadura formado por dos abanicos de compresión. La resistencia de este mecanismo de arco fue similar a la contribución del concreto, por lo que al presentarse el agrietamiento por tensión diagonal, las trabes fueron incapaces de: a) redistribuir fuerzas internas, b) aceptar más daño estructural y, c) tomar carga adicional. Por lo tanto, estas trabes no se comportaron como unas esbeltas asociadas a un mecanismo de viga, sino como seudoesbeltas asociadas a un mecanismo de arco. La seudoesbeltez parece no depender de la cuantía de refuerzo transversal, sino que es la consecuencia de un detallado deficiente en las regiones D favorecido por la idea prevalente de que las regiones B y D pueden diseñarse por separado (Schlaich *et al.*, 1987, “Subcommittee 445-1” 2002).

8. DETALLADO EN LAS REGIONES D

Como se demostró en la sección previa, un diseño por cortante en el que no se tome en cuenta la interacción que existe entre: i) la esbeltez, ii) los mecanismos de arco y de viga y, iii) las regiones B-D, puede hacer que el mecanismo resistente de viga que debe caracterizar a una trabe esbelta no se desarrolle, lo que podría conducir a una situación inaceptable en la que el acero de refuerzo transversal sea inefectivo.

La solución que se propone a este problema implica un diseño integral de las regiones B-D, donde los abanicos de compresión que forman las regiones D se configuran o detallan con base en campos de esfuerzo y modelos de armadura, y no con reglas semiempíricas. Por ejemplo, en el reglamento ACI-318 la separación de estribos depende del nivel de esfuerzo cortante y queda controlada por las separaciones $s = d/2$ y $s = d/4$ que difícilmente fomentan la formación del campo de compresión diagonal supuesto ($\theta = 45^\circ$), pues éstas se han justificado con el análisis de grietas aisladas (Fig. 24) y no con el conjunto de grietas paralelas y radiales que se dan forma a las regiones B y D, respectivamente.

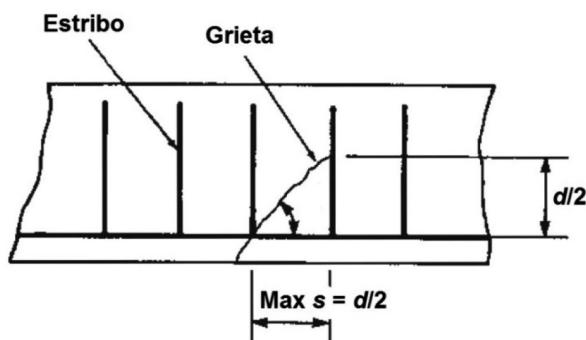


Fig. 24: Justificación de la separación máxima de estribos del reglamento ACI-318 (MacGregor 1997).

En el modelo de armadura de una trabe esbelta la demanda en los abanicos de compresión es la misma que en el campo de compresión diagonal, es decir, igual a la contribución del acero de refuerzo transversal ($V_s = A_f y_w d/s \tan \theta$). En estructuras nuevas el diseñador es libre de despreciar o tomar en cuenta la contribución del concreto para economizar el refuerzo. Sin embargo, el análisis presentado de la trabe A-2 de Bresler y Scordelis (1963) sugiere que la mejor predicción de la resistencia última se obtiene al incluir la contribución del concreto. Por esta razón, es recomendable siempre diseñar los apoyos suponiendo un cortante de falla igual a la suma de la contribución del concreto y del acero de refuerzo.

Para fines de diseño se recomienda configurar los abanicos de compresión con al menos tres estribos uniformemente distribuidos dentro de la distancia $x_{cr} = d/\tan \theta$ (Fig. 25). El primer estribo debe colocarse a una distancia $e \geq 0.1d/\tan \theta$ medida desde el centroide de la reacción o carga concentrada, pues de lo contrario podría no participar en el mecanismo resistente (Archundia 2013). Con esta configuración, los puntales radiales que dan forma al abanico de compresión satisfacen el intervalo $\tan \theta \leq \tan \theta_D \leq 10\tan \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación del campo de compresión diagonal ($26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$) y θ_D es el de los puntales del abanico. Con este arreglo teóricamente los abanicos quedan contenidos en la distancia que exige el modelo de armadura de una trabe esbelta, y la frontera entre las regiones B-D es un puntal con inclinación $\theta = \theta_D$. Para la revisión de elementos existentes los abanicos deben esbozarse con base en esta recomendación, y con un estimado de la carga de falla, pero privilegiando los patrones de agrietamiento y la distribución de estribos.

En la figura 26 se presenta un ejemplo que muestra lo sencillo que puede ser configurar los abanicos de compresión. Se trata de una trabe sometida a cargas concentradas o distribuidas que debe ser diseñada para desarrollar un campo de compresión diagonal con $\theta = 45^\circ$. Dentro de la extensión teórica del abanico $x_{cr} = d/\tan \theta$ se requieren cuatro estribos que deben distribuirse uniformemente, poniéndose el primero de ellos a una distancia $e = 0.25d \geq 0.1d/\tan \theta$ medida desde el apoyo (Fig. 26b). La posición del último estribo genera un puntal con una inclinación $\theta_D = \theta = 45^\circ$ congruente con el campo de compresión diagonal supuesto. Se usaron cuatro estribos para mostrar que este arreglo fomenta un puntal con una inclinación igual a la del modelo de armadura simplificado mostrado en la figura 26-a ($\theta_D = 63.4^\circ$). Finalmente, cuando se tengan cargas uniformes debe usarse un diagrama de cortante más seguro que el mostrado en la figura 7, por ejemplo, el sugerido por Archundia y Tena (2014 b).

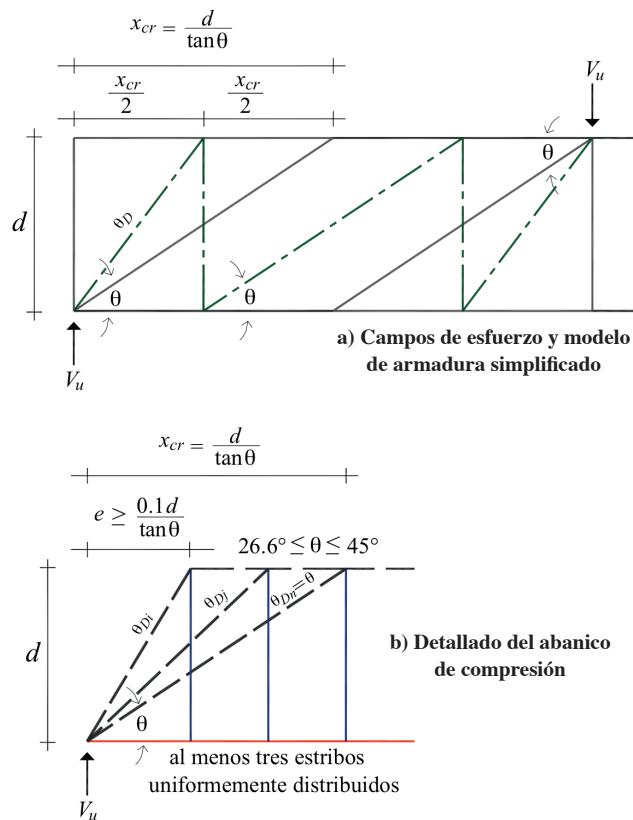


Fig. 25: Configuración sugerida para un abanico de compresión.

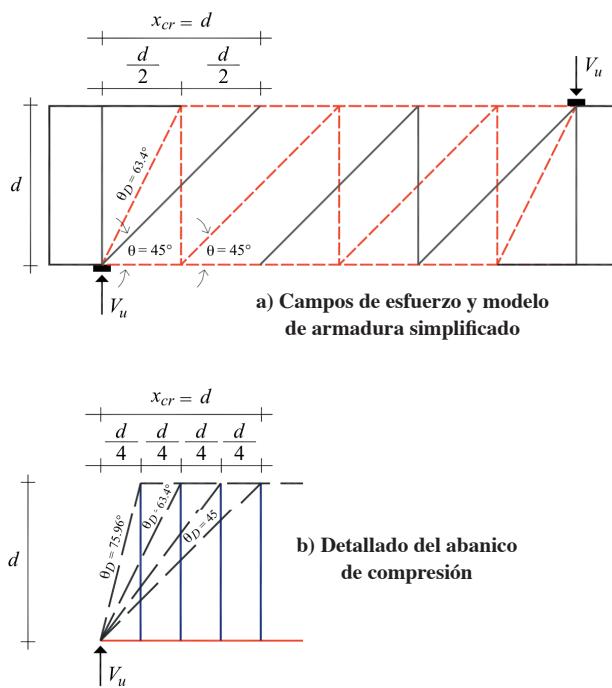


Fig. 26: Opción para configurar un abanico de una armadura con $\theta = 45^\circ$

9. CONCLUSIONES

Se presentaron nuevas definiciones para la sección crítica, la esbeltez y las regiones B-D de tráves esbeltas de concreto reforzado, que están sustentadas en campos de esfuerzo y modelos de armadura. La forma en que se desarrollaron permitió demostrar la relación que existe entre ellas, y unificar el criterio para el estudio de las tráves esbeltas con y sin estribos. La aplicación de las definiciones permitió validar el uso de la contribución del concreto recomendada en el reglamento ACI-318, e identificar que la distribución de estribos sustentada en reglas de detallado semiempíricas puede hacer que una tráve esbelta no desarrolle el mecanismo de viga que debe caracterizarla, a lo que se le ha dado el nombre de seudoesbeltez. Se demostró que la seudoesbeltez puede hacer totalmente ineficiente el acero de refuerzo transversal, por lo que se propuso una alternativa para hacer un diseño integral de las regiones B-D a partir de campos de esfuerzo y modelos de armadura.

Finalmente, se tiene confianza de que las aportaciones presentadas en este trabajo son un puente entre el diseño por secciones y el de elemento completo, y que permitirán entender de una manera más clara el comportamiento, diseño y revisión de las tráves esbeltas de concreto reforzado.

REFERENCIAS

- ACI-318-11 (2011), "Building code requirements for structural concrete (ACI-318-11) and commentary (ACI-318R-11)", ACI Committee 318, American Concrete Institute, E.U.A.
- Alcocer, S. (1998), "Algunas tendencias del concreto estructural", *XI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Monterrey, Nuevo León, noviembre. Memorias, Vol. I, pp. 3-32.
- Al-Nahlawi, K. A. y J. K. Wight (1992), "Beams analysis using concrete tensile strength in truss models", *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 3, pp. 284-289.
- Archundia, H. I. (2013), "Recomendaciones de diseño a cortante para tráves acarteladas de concreto reforzado", *Tesis Doctoral*, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, noviembre, pp. 650.
- Archundia, H. I. y A. Tena (2014a), "Diseño racional a cortante de tráves acarteladas de concreto reforzado", *Concreto y Cemento. Investigación y Desarrollo*, Vol. 6, No. 2, pp. 2-29.
- Archundia, H. I. y A. Tena (2014/b), "Diagrama de cortante escalonado seguro y congruente con los campos de esfuerzo para el diseño de tráves esbeltas de concreto reforzado con cargas distribuidas", Artículo 01-23, *XIX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Puerto Vallarta, Jalisco, noviembre. Memorias CD-ROM.
- Bentz, E. C., F. J. Vecchio y M. P. Collins (2006), "Simplified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements", *ACI Structural Journal*, Vol. 103, No. 4, pp. 614-624.
- Bresler, B. y A. C. Scordelis (1963), "Shear strength of reinforced concrete beams", *ACI Journal Proceedings*, Vol. 60, No. 1, pp. 51-74.
- CEB-FIP(1990), "CEB-FIP model code 1990-Design code", Comité Euro-International du Beton, Thomas Telford, Suiza.
- Cerruti, L. M. y P. Martí (1987), "Staggered shear design of concrete beams: large-scale test", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol 14, No. 2, pp. 257-268.
- Choi, K. H. Park y J. K. Wight (2007), "Unified shear strength model for reinforced concrete beams – Part 1: Development", *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 2, pp. 142-152.
- Collins, M. P. y D. Mitchell (1980), "Shear and torsion design of prestressed and non-prestressed concrete beams", *PCI Journal*, Vol. 25, No. 5, pp. 32-100.
- Collins, M. P. y D. Mitchell (1986), "A rational approach to shear design - The 1984 Canadian Code Provisions", *ACI*

Structural Journal, Vol. 83, No. 6, pp. 925-933.

Collins, M. P., D. Mitchell, P. Adebar y F. J. Vecchio (1996), "A general shear design method", *ACI Structural Journal*, Vol. 93, No. 1, pp. 36-45.

Collins, M. P. (1998), "Opinion: Procedures for calculating the shear response of reinforced concrete elements: A discussion", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1485-1488.

Collins, M. P., E. C. Bentz, E. G. Sherwood y L. Xie (2007), "An adequate theory for the shear strength of reinforced concrete structures", *Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Application*, University of Cambridge, Inglaterra. Committee 326 (1962a), "Shear and diagonal tension. Part 1: General principles", Report of ACI-ASCE Committee 326, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 59, No. 1, pp. 1-30.

Committee 326 (1962b), "Shear and diagonal tension. Part 2: Beams and frames", Report of ACI-ASCE Committee 326, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 59, No. 2, pp. 277-334.

Committee 426 (1973), "The shear strength of reinforced concrete members", Joint ASCE-ACI Task Committee 426, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 99, No. 6, pp. 1091-1187.

Committee 445 (1998), "Recent approaches to shear design of structural concrete", ASCE-ACI Committee 445, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1375-1417.

CSA 04 (2004), "Design of concrete structures" CSA Standards A.23.3-04", Canadian Standards Association, Canadá. Eurocode 2 (2004), "Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings", British Standards Institution, Gran Bretaña.

Fernandez Ruiz, M. y A. Muttoni (2007), "On development of suitable stress fields for structural concrete", *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 4, pp. 495-502.

FIB (2010), "Fib Model Code for Concrete Structures 2010", International Federation for Structural Concrete, Ernst und Sohn, Alemania.

Frosch, R. J. (2000), "Behavior of large-scale reinforced concrete beams with minimum shear reinforcement", *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No. 6, pp. 814-820.

Hsu, T. T. C. (1993), *Unified theory of reinforced concrete*, second, CRC Press, E.U.A.

Kani, G. N. J. (1964), "The riddle of shear failure and its solution", *ACI Journal Proceedings*, Vol. 61, No. 4, pp. 441-468.

Kani, G. N. J. (1967), "How safe are our large reinforced concrete beams", *ACI Journal Proceedings*, Vol. 64, No. 3, pp. 128-141.

Kaufmann, W. y P. Martí (1996), "Versuche an Stahlbetonträgern unter Normal und Querkraft (Ensayos de vigas de concreto reforzado ante cortante y carga axial)", *Report ETH 22498*, Institute of Structural Engineering, ETH Zurich, noviembre (en Alemán), pp. 14.

Kaufmann, W (1998), "Strength and deformations of structural concrete subjected to in-plane shear and normal forces", *Tesis Doctoral*, Institute of Structural Engineering, ETH Zurich, julio.

Kim, W. y R. N. White (1991), "Initiation of shear cracking in reinforced concrete beams with no web reinforcement", *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 3, pp. 301-308.

Kotsovos, M. D. (1988), "Compressive force path concept: Basis for ultimate limit state reinforced concrete design",

ACI Structural Journal, Vol. 85, No. 1, pp. 68-75.

Kotsovos, M. D. (2007), "Concepts underlying reinforced concrete design: Time for reappraisal", *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 6, pp. 675-684.

Lee, J. Y. y H. B. Hwang (2010), "Maximum shear reinforcement of reinforced concrete beams", *ACI Structural Journal*, Vol. 107, No. 5, pp. 580-588.

MacGregor, J. G. (1997), *Reinforced concrete - mechanics and design*, third edition, Pearson-Prentice Hall, E.U.A.

Marti, P. (1985/a), "Basic tools of reinforced concrete beam design", *ACI Journal*, Vol. 82, No. 1, pp. 46-56.

Marti, P. (1985/b), "Truss models in detailing", *Concrete International*, Vol. 7, No. 12, pp. 66-73.

Marti, P. (1986), "Staggered shear design of simply supported concrete beams", *ACI Journal*, Vol. 83, No. 1, pp. 36-42.

Mörsch, E. (1909), *Concrete-steel construction (Der Eisenbetonbau)*, traducción autorizada de la tercera edición en Alemán de 1908, The Engineering Publishing News Company, Londres.

Buttoni, A., J. Schwartz y B. Thürlmann (1997), *Design of concrete structures with stress fields*, Birkhäuser, Suiza.

Buttoni, A. y M. Fernández Ruiz (2008), "Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width", *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 2, pp. 163-172.

Nielsen, M. P. (1999), *Limit analysis and concrete plasticity*, second edition, CRC Press, E.U.A.

Reineck, K. H. (1991), "Ultimate shear force of structural concrete members without transverse reinforcement derived from a mechanical model", *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 5, pp. 592-602.

Reineck, K. H. (2002), "Part 5: Modeling structural concrete with strut-and-tie models – summarizing discussions of the examples as per Appendix A of ACI 318-2002", *ACI Structural Journal Special Publication*, No. 208, Editor Karl-Heinz Reineck, pp. 225-242.

Rogowsky, D. (1983), Discussion of "Is the "Staggering Concept" of shear design safe?", *ACI Journal*, Vol. 80, No. 5, pp. 445-454.

Rogowsky, D. M. y J. G. MacGregor (1983), "Shear strength of deep reinforced concrete continuous beams", *Structural Engineering Report No. 110*, Department of Civil Engineering, University of Alberta, pp. 178.

Rogowsky, D. M. y J. G. MacGregor (1986), "Design of reinforced concrete deep beams", *Concrete International*, Vol. 8, No. 8, pp. 49-58.

Schlaich, J., K. Schäfer y M. Jennewein (1987), "Toward a consistent design of structural concrete", *PCI Journal*, Vol. 32, No. 3, pp. 74-150.

Sigrist, V., M. Álvarez y W. Kaufmann (1995), "Shear and flexure in structural concrete beams", Institute of Structural Engineering, ETH Zurich, pp. 45, junio. (Reprint from Comité Euro-International du Béton (CEB) Bulletin d'Information No. 223 "Ultimate Limit State Design Models" A state-of -art report, June 1995).

Sigrist, V. (2011), "Generalized stress field approach for analysis of beams in shear", *ACI Structural Journal*, Vol. 108, No. 4, pp. 479-487.

Subcommittee 445-1 (2002), "Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models", *ACI Structural*

Journal Special Publication, No. 208, Editor Karl-Heinz Reineck.

Talbot, A. N. (1909), "Test of reinforced concrete beams: resistance to web stress – series of 1907 and 1908", *Bulletin No. 29*, Engineering Experimental Station, University of Illinois, enero, pp. 85.

Thürlimann, B. (1979), "Plastic analysis of reinforced concrete beams", *IABSE Reports*, Vol. 28, International Association of Bridge and Structural Engineering, pp. 71-90.

Tompos, E. J. y R. J. Frosch (2002), "Influence of beam size longitudinal reinforcement, and stirrup effectiveness on concrete shear strength", *ACI Structural Journal*, Vol. 99, No. 5, pp. 559-567.

Tureyen, A. K. y R. J. Frosch (2003), "Concrete shear strength: Another perspective", *ACI Structural Journal*, Vol. 100, No. 5, pp. 609-615.

Vecchio, F. J. y M. P. Collins (1986), "The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear", *ACI Structural Journal*, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.

Vecchio, F. J. (2000), "Analysis of shear-critical reinforced concrete beams", *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No. 1, pp.102-110.

Vecchio, F. J. y W. Shim (2004), "Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 130, No. 3, pp.460-469.

Zararis, P. D. y G. Ch. Papadakis (2001), "Diagonal shear failure and size effect in RC beams without web reinforcement", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, No. 7, pp. 733-742.

Zhang, J. P. (1994), "Strength of cracked concrete. Part 1: Shear strength of conventional reinforced concrete beams deep beams, corbels and prestressed reinforced concrete beams without shear reinforcement", *Reporte 311*, Serie R, Departamento de Ingeniería Estructural, Universidad Técnica de Dinamarca (DTU), ISBN 87-7740-146-8, pp. 106.