Atmósfera (2000) 13, pp. 27-38

Optimización de emisiones industriales para la protección de zonas ecológicas

DAVID PARRA-GUEVARA y YURI N. SKIBA

Centro de Ciencias de la Atmósfera, UNAM,
CU, 04510, México, D. F., México

(Manuscrito recibido 10 de febrero, 1999; aceptado en forma final 9 de junio, 1999)

RESUMEN

Se formula la propagación de contaminantes emitidos en la atmósfera por varias fuentes industriales usando la ecuación de transporte bidimensional. Se deriva el modelo adjunto y un principio de dualidad, los cuales permiten plantear restricciones suficientes a las tasas de emisión de cada fuente industrial, con el objetivo de mantener la concentración promedio del contaminante en una zona de importancia ecológica por debajo de un valor máximo admisible. Se sugieren dos estrategias. La primera se basa en la minimización de la norma en L_2 de la fuente contaminante sujeta a una ecuación de enlace determinada por el principio de dualidad. La segunda estrategia se deriva de una acotación adecuada del principio de dualidad. En ambos casos las estrategias se definen en términos de la solución del problema adjunto.

ABSTRACT

The problem of propagation of pollutants emitted into the atmosphere by various industrial sources is formulated using the two-dimensional transport equation. An adjoint transport model and dual principle are derived that permit to impose sufficient restrictions on the emission rates of each industrial pollution source in order to maintain average pollution concentration in an ecologically important zone below a maximally admissible value. Two strategies of control of the emission rates are suggested. The first one is based on the minimization of the L_2-norm of the emission rates subjected to a linking equation determined by the dual principle. The second strategy is derived from an adequate limitation on the temporal behavior of the emission rates. Both the strategies are defined in terms of the adjoint transpot problem solution.

1. Introducción

Asumiendo que se conoce la velocidad del viento U en una región D, por ser una información que proviene de un modelo dinámico o datos climáticos (Davydova y Skiba, 1998; Davydova *et al.*, 1999), es posible modelar la propagación de contaminantes emitidos en la atmósfera usando la ecuación de transporte bidimensional. Tanto el problema de la propagación del contaminante, como el de la optimización de las emisiones desde plantas industriales, son problemas de importancia ecológica que fueron formulados en la década pasada (Marchuk, 1982, 1986; Penenko y Raputa, 1983; Skiba, 1993). Dichos problemas pueden ser estudiados usando las formulaciones directa y adjunta del problema de transporte, complementándose ambas en función de la característica del modelo a estudiar. Algunos algoritmos numéricos balanceados y absolutamente estables para resolver dichas formulaciones en una área limitada, fueron propuestos por Skiba (1993, 1995, 1997) y Skiba *et al.* (1996).

El objetivo de este trabajo es deducir restricciones matemáticas suficientes para las tasas de emisión de contaminantes de industrias ubicadas en una región D, con la finalidad de que la concentración promedio en espacio y tiempo de una especie contaminante en una zona de importancia ecológica Ω, no rebase un valor máximo admisible J_0. El valor J_0 se fija de acuerdo a normas sanitarias y a la importancia de la zona (habitacional, escolar, áreas verdes, etc.). Para formular las restricciones resulta de gran importancia el principio de dualidad que relaciona los modelos directo y adjunto (Marchuk y Skiba, 1976), dicho principio es el resultado de considerar las soluciones de los modelos dentro de la identidad de Lagrange.

2. Modelo directo

Una sustancia (especie) contaminante en la atmósfera se encuentra sujeta a diversos procesos físicos y químicos que influyen en su propagación, tres de éstos son: advección por corrientes, difusión turbulenta y destrucción por reactividad fotoquímica. En lo que sigue se plantea un modelo simple que toma en cuenta estos tres fenómenos y se asume que el campo responsable del proceso advectivo (viento) no contiene componente vertical, por lo cual el fenómeno de propagación se considera bidimensional.

Sea D un dominio conexo bidimensional con frontera abierta S y sean $\mathbf{r}_i \in D$, $i = 1..N$, las ubicaciones de las industrias que emiten una especie contaminante con tasas respectivas $Q_i(t)$, $i = 1, ..., N$. Denotemos con $\phi(\mathbf{r}, t)$ la concentración de la especie contaminante en el punto $\mathbf{r}$ al tiempo t. En una primera aproximación la propagación del contaminante se puede describir mediante el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi + \sigma \phi - \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) = f(\mathbf{r}, t) \quad \text{en} \quad D \times (0, T), \tag{1}$$

$$\phi(\mathbf{r}, 0) = \phi^0(\mathbf{r}) \quad en \quad D, \tag{2}$$

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - U_n \phi = 0 \quad en \quad S^-, \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad en \quad S^+, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad en \quad D, \tag{5}$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ denota la velocidad del viento en D y se asume que cumple la ecuación de continuidad (5). $\sigma > 0$ y $\mu > 0$ son los coeficientes de destrucción química de la especie contaminante y difusión turbulenta respectivamente, y $f(\mathbf{r},t)$ es el forzamiento formado por las fuentes puntuales de emisión del contaminante:

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

La ecuacion (2) define a ϕ^0 como la distribución espacial de la especie contaminante al tiempo $t = 0$ sobre D, es decir, ϕ^0 es el residuo del contaminante en la atmósfera que dejó la actividad industrial en un intervalo de tiempo pasado (por ejemplo el día anterior).

La frontera S se ha dividido en dos partes dependiendo de si el flujo entra a D o sale, es decir, S^+ se define como los puntos de S tal que $U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \geq \mathbf{0}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior y S^- se define como el complemento ($U_n = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < \mathbf{0}$). La condición de frontera (3) dice que cuando el viento ingresa a D, el flujo total del contaminante tomando en cuenta difusión y advección es igual a cero, por lo cual en S^- no hay salida de la especie contaminante. La condición de frontera (4) dice que cuando el viento sale de D se desprecia el flujo difusivo turbulento en comparación con el flujo advectivo del contaminante. Estas condiciones de frontera fueron definidas por Marchuk (1986) y generalizadas al caso de tres dimensiones por Skiba (1993).

Las condiciones de frontera (3) y (4) tienen buenas características matemáticas, ya que hacen del problema (1)-(5) un problema bien formulado en el sentido de Hadamard (1923), es decir, la solución del problema (1)-(5) es única y estable respecto de pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales, más aún, es posible mostrar que hay estabilidad respecto a pequeñas perturbaciones en el forzamiento. Para mostrar esto se define el operador:

$$A(\phi) = \mathbf{U}\cdot\nabla\phi + \sigma\phi - \nabla \cdot (\mu\nabla\phi),$$

en el dominio

$$\Phi = \{\phi \in C^2(D) \mid \phi \ cumple \ (3) \ y \ (4)\} \subset L_2(D).$$

El operador A es positivo, ya que:

$$(A(\phi),\phi) = \int_D (\sigma\phi^2 + \mu |\nabla\phi|^2) d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\left[\int_{S^+} \phi^2 U_n dS - \int_{S^-} \phi^2 U_n dS\right] > 0 \ \forall\phi \in \Phi,$$

donde el producto interior se toma en el espacio de Hilbert $L_2(D)$, es decir, $(\varphi,\psi) = \int_D \varphi\psi d\mathbf{r}$.

De la última desigualdad se puede deducir la siguiente acotación en un intervalo de tiempo fijo $[0,T]$:

$$\|\phi\| \leq T \max_{0\leq t\leq T} \|f(\mathbf{r},t)\| + \left\|\phi^0\right\|,$$

donde $\|\phi\| = \sqrt{(\phi,\phi)}$ es la norma de $L_2(D)$.

De esta última acotación y usando el hecho de que el modelo (1)-(5) es lineal, se obtiene la unicidad y estabilidad antes mensionada. Para una demostración de existencia, unicidad y estabilidad en espacios de funciones generalizadas se puede consultar Skiba y Parra-Guevara (1999).

Si se integra (1) sobre D y se usan las condiciones (3), (4) y (5), se obtiene la ecuación de balance:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D \phi d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{N} Q_i(t) - \int_D \sigma\phi d\mathbf{r} - \int_{S^+} U_n \phi dS,$$

esta ecuación dice que la variación de la masa total de la especie contaminante en D es igual a la suma de tasas con que se suministra, menos la destrucción total por actividad fotoquímica, menos la perdida del contaminante que escapa por la frontera debido a la advección (notar que $U_n \geq 0$ en S^+), lo cual es consistente con el fenómeno en estudio.

Ahora consideremos a Ω una región (fija) de importancia ecológica contenida en D, se define la funcional $\mathbf{J}$ como:

$$\mathbf{J}(\phi) = \frac{1}{\mid \Omega \mid \tau}\int_\Omega \int_{T-\tau}^{T} \phi(\mathbf{r},t) dt d\mathbf{r},$$

$\mathbf{J}$ representa la concentración promedio en la región Ω y en el intervalo de tiempo $[T-\tau, T]$ de la especie contaminante en estudio.

Dependiendo del tipo de región que sea Ω, se define una concentración máxima admisible J_0 de la especie contaminante, que puede ser tolerada por la acumulación de las emisiones industriales. El objetivo ahora es acotar (restringir) en forma adecuada las tasas $Q_i(t)$, $i = 1..N$, de tal manera que se cumpla la desigualdad:

$$\mathbf{J}(\phi) \leq J_0.$$

Para alcanzar este objetivo se define un modelo adjunto asociado al modelo directo antes descrito.

3. Modelo adjunto

Sea H un espacio de Hilbert y $L : H \to H$ un operador lineal con dominio Φ, el operador adjunto de L es un operador lineal $L^* : H \to H$ con dominio Φ^* que satisface la identidad de Lagrange:

$$(L\phi, g) = (\phi, L^* g) \qquad \forall\ \phi \in \Phi\ ,\ g \in \Phi^*.$$

Para el problema de la propagación de una especie contaminante en la atmósfera se tiene que:

$$H = L_2(D \times (0,T)), \qquad L(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\phi + \sigma\phi - \nabla\cdot(\mu\nabla\phi) \quad y$$

$$\Phi = \{\phi \in C^2(D \times (0,T)) \mid \phi\ cumple:\ \phi(0) = 0, (3)\ y\ (4)\}.$$

Usando la identidad de Lagrange se puede mostrar que:

$$L^*(g) = -\frac{\partial g}{\partial t} - \mathbf{U}\cdot\nabla g + \sigma g - \nabla\cdot(\mu\nabla g).$$

El modelo adjunto se puede ahora formular como:

$$-\frac{\partial g}{\partial t} - \mathbf{U}\cdot\nabla g + \sigma g - \nabla\cdot(\mu\nabla g) = p(\mathbf{r},t) \quad en \quad D\times(0,T), \tag{6}$$

$$g(\mathbf{r},T) = 0 \quad en \quad D, \tag{7}$$

$$\mu\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad en \quad S^{-}, \tag{8}$$

$$\mu\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + U_n g = 0 \quad en \quad S^{+}. \tag{9}$$

Donde (7), (8) y (9), definen el dominio Φ^* del operador L^* y $p(\mathbf{r},t)$ es un forzamiento por definir.

El problema (6)-(9) es un problema bien formulado en el sentido de Hadamard (1923) si se resuelve de $t = T$ a $t = 0$, la demostración es similar a la del problema (1)-(5).

Multiplicando (1) por g y (6) por ϕ, restando los resultados, integrando en $D\times(0,T)$ y usando (2), (3), (4), (5), (7), (8) y (9) se establece el principio de dualidad para cualquier forzamiento p:

$$\int_D\int_0^T p(\mathbf{r},t)\phi(\mathbf{r},t)dtd\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{N}\int_0^T g(\mathbf{r}_i,t)Q_i(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

Al definir

$$p(\mathbf{r},t) = \left\{\begin{array}{cc} \frac{1}{|\Omega|\tau} & (\mathbf{r},t)\in\Omega\times(T-\tau,T) \\ 0 & (\mathbf{r},t)\notin\Omega\times(T-\tau,T) \end{array}\right\},$$

se obtiene del principio de dualidad que:

$$\mathbf{J}(\phi) = \sum_{i=1}^{N}\int_0^T g(\mathbf{r}_i,t)Q_i(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Esta última ecuación calcula el impacto de las emisiones contaminantes sobre la región Ω ponderando las tasas de emisión con la solución del modelo adjunto restringida a los sitios de las emisiones. Es importante notar que la solución del modelo adjunto no depende de los parámetros del problema de contaminación ($Q_i, \mathbf{r}_i$ y ϕ^0), y sí depende de la región Ω y el intervalo de tiempo de análisis, es entonces el principio de dualidad el enlace entre todos los parámetros.

4. Primera estrategia de restricción

En lo que sigue se formula la primera estrategia de restricción para las tasas de emisiones contaminantes.

Se asume que sólo hay una fuente contaminante en el sitio $\mathbf{r}_0$ con una tasa de emisión $Q(t)$ (más adelante se hace una generalización), con esto la ecuación (10) toma la forma:

$$\mathbf{J}(\phi) = \int_0^T g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

donde la integral $\int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, representa la concentración de la especie contaminante en Ω durante el intervalo de tiempo $[T-\tau,T]$, debido sólo a la distribución del contaminante que había en D al tiempo $t=0$, es decir, el residuo del contaminante en la atmósfera por la actividad industrial del día anterior.

El impacto que tiene ϕ^0 en los niveles de contaminación en Ω es imposible de evitar, por lo tanto la meta es restringir la tasa Q de tal forma que el impacto de ésta en Ω no supere el valor $J_0 - \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r}$.

Se define el parámetro α como:

$$\alpha = J_0 - \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r} \ . \tag{11}$$

Si $\alpha = 0$ entonces la única estrategia de restricción de contaminantes para cumplir que:

$$\mathbf{J}(\phi) \leq J_0,$$

es tomar $Q \equiv 0$ (parar la actividad industrial). Si $\alpha < 0$ entonces aún tomando $Q \equiv 0$, se tiene que se sobrepasa la concentración máxima admisible J_0 en la región Ω, sin embargo es importante notar que parar la actividad industrial reduce el riesgo de alcanzar niveles tóxicos del contaminante. El caso más interesante ocurre cuando $\alpha > 0$, que corresponde al caso en que el residuo del contaminante del día anterior es pequeño.

Con la suposición de $\alpha > 0$ y usando el producto interior de $L_2(0,T)$ podemos afirmar que nuestro objetivo es hallar $Q \in L_2(0,T)$ tal que:

$$(g(\mathbf{r}_0),Q) \leq \alpha.$$

Existe una infinidad de soluciones a este problema, donde cada Q define una estrategia de restricción de emisiones contaminantes.

Una tasa de emisión Q tal que $(g(\mathbf{r}_0),Q) < \alpha$, puede restringir significativamente la producción de una empresa, por lo cual es mejor para la industria buscar Q tal que $(g(\mathbf{r}_0),Q) = \alpha$. Este último problema también tiene una infinidad de soluciones, y algunas de ellas aun cuando mantienen niveles de contaminación aceptables en Ω, pueden tener fuertes emisiones en $\mathbf{r}_0$ y dañar con esto una vecindad de este punto. Para evitar esto se deben hallar aquellas tasas de emisión Q que liberen la menor masa contaminante entre aquellas que cumplan $(g(\mathbf{r}_0),Q) = \alpha$. Como más adelante se muestra este problema tiene solución única y se denota como $Q_{\min}$.

Se define la funcional $F : L_2(0,T) \to R$ como:

$$F(Q) = \|Q\|^2 ,$$

donde $\|Q\| = \sqrt{\int_0^T Q^2(t)dt}$, es la norma inducida en $L_2(0,T)$. F mide la masa total del contaminante emitida por la fuente en $\mathbf{r}_0$, con una tasa Q en el intervalo de tiempo $[0,T]$.

Se define el siguiente problema de optimización:

$$\min F(Q) = \| Q \|^2,$$

$$\textit{sujeto a } (g(\mathbf{r}_o), Q) = \alpha.$$

Este problema de optimización tiene una interpretación geométrica sencilla. La ecuación $(g(\mathbf{r}_0), Q) = \alpha$, define un hiperplano en $L_2(0,T)$ con normal $g(\mathbf{r}_0, t)$ y F representa la distancia de cada punto en este hiperplano al origen. Por lo tanto el problema de optimización consiste en hallar el punto del hiperplano de mínima distancia al origen.

En lo que sigue se muestra que este problema tiene solución única y además la L_2-norma de dicha solución define una cota adecuada para las tasas de las fuentes contaminantes.

LEMA 1. *El conjunto:*

$$C = \{Q \in L^2(0,T) \mid (g(\mathbf{r}_0), Q) = \alpha\},$$

es convexo y $F\mid_C$ *es estrictamente convexa.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean Q_1 y Q_2 elementos distintos en C y $\lambda \epsilon (0,1)$, $\lambda Q_1 + (1-\lambda) Q_2 \epsilon L^2(0,T)$ y

$$(g(\mathbf{r}_0), \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) = \lambda(g(\mathbf{r}_0), Q_1) + (1-\lambda)(g(\mathbf{r}_0), Q_2) = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha,$$

por lo tanto C es convexo.

Por otra parte:

$$(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)^2 = (Q_2 + \lambda(Q_1 - Q_2))^2 < \lambda Q_1^2 + (1-\lambda)Q_2^2 \ , \forall t$$

ya que $\lambda^2 < \lambda$. Integrando en $(0,T)$ se tiene la convexidad estricta de F.

LEMA 2. *Para toda funcional F estrictamente convexa definida sobre un conjunto convexo C contenido en un espacio normado, se tiene que:*

i) si existe un mínimo local de F sobre C entonces este debe ser un mínimo global sobre C, y

ii) si existe un mínimo global de F sobre C entonces este debe ser único.

DEMOSTRACIÓN:

Ver Cheney (1966), Watson (1980) y Achieser (1992).

Por los lemas 1 y 2 tenemos que si el problema de optimización antes formulado tiene un mínimo, entonces éste debe ser único.

Ahora mostramos la existencia de dicho mínimo.

TEOREMA 1. *Sea*

$$Q_{\min} = \alpha \frac{g(\mathbf{r}_0, t)}{\|g(\mathbf{r}_0)\|^2},$$

entonces $Q_{\min}$ *es el mínimo de* F *sobre* C.

DEMOSTRACIÓN:

$Q_{\min} \in L^2(0,T)$ y

$$(g(\mathbf{r}_0), Q_{\min}) = (g(\mathbf{r}_{0,}t), \alpha \frac{g(\mathbf{r}_0, t)}{\|g(\mathbf{r}_0)\|^2}) = \alpha,$$

por lo cual $Q_{\min} \in C$.

Sea $Q \in C$ arbitrario y definamos $\delta Q = Q - Q_{\min}$. Tenemos que $\forall\ \lambda \in R$

$$(Q_{\min} + \lambda \delta Q, g(\mathbf{r}_0)) = \alpha \quad y \quad (Q_{\min}, \delta Q) = 0.$$

Definamos :

$$h(\lambda) = F(Q_{\min} + \lambda \delta Q) = \int_0^T (Q_{\min} + \lambda \delta Q)^2 dt.$$

$$h'(\lambda) = 2 \int_0^T (Q_{\min} + \lambda \delta Q) \delta Q dt \qquad y \qquad h'(0) = \int_0^T Q_{\min} \delta Q dt = 0,$$

por lo tanto $\lambda = 0$ es un punto crítico de $h(\lambda)$.

$$h''(\lambda) = 2 \int_0^T \delta Q^2 dt > 0,$$

por lo cual $\lambda = 0$ es un mínimo local de h. Ya que h es la restricción de F sobre una linea en C, entonces h es estrictamente convexa y por el Lema 2 tenemos que $\lambda = 0$ es un mínimo global único, por lo tanto:

$$h(0) < h(1) \qquad ó \qquad F(Q_{\min}) < F(Q).$$

TEOREMA 2. *Sea* $\alpha > 0$ *y* $Q(t) \geq 0$ *cualquier tasa de emisión de contaminantes en el sitio* $\mathbf{r}_0$ *tal que:*

$$\|Q\| \leq \|Q_{\min}\| = \frac{\alpha}{\|g(\mathbf{r}_0)\|},$$

entonces se cumple que la concentración promedio del contaminante en una zona de importancia ecológica Ω *no rebasa la concentración máxima admisible* J_0.

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$(Q, g(\mathbf{r}_0)) \leq \|Q\| \, \|g(\mathbf{r}_0)\| \leq \frac{\alpha}{\|g(\mathbf{r}_0)\|} \|g(\mathbf{r}_0)\| = \alpha,$$

usando (11) concluimos que:

$$\mathbf{J}(\phi) = \int_0^T g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r} \leq J_0.$$

Es importante notar que la última proposición define la cota que debe cumplir la norma de la tasa de emisión Q y por lo tanto no se restringe la forma de Q en el intervalo $(0,T)$.

5. Segunda estrategia de restricción

En esta sección se formula una estrategia de restricción de emisiones contaminantes que a diferencia de la planteada en la sección anterior lo que restringe es la forma de Q en el intervalo $(0,T)$.

Se supone como en la sección anterior que sólo hay una fuente que emite contaminantes en el sitio $\mathbf{r}_0$ y que el parámetro α definido por (11) es positivo. El objetivo como antes es hallar $Q \in L^2(0,T)$ tal que:

$$\int_0^T g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt \leq \alpha.$$

La idea para lograr que se cumpla la desigualdad anterior es permitir que $Q(t)$ tome valores grandes cuando $g(\mathbf{r}_0,t)$ tiene valores pequeños, y que $Q(t)$ tome valores pequeños cuando $g(\mathbf{r}_0,t)$ tiene valores grandes. La desventaja en este criterio es que en un determinado intervalo de tiempo se permitirían descargas muy grandes de contaminantes (por ejemplo si $g(\mathbf{r}_0,t) = 0$), provocando un grave desequilibrio ecológico en una vecindad del punto $\mathbf{r}_0$. Por tal motivo se define el parámetro $\delta > 0$ como la tasa máxima de emisión admitida por la fuente en $\mathbf{r}_0$, la cual no viola las restricciones sanitarias impuestas en una vecindad de este punto.

Se define la función G como:

$$G(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\alpha}{|I| \cdot g(\mathbf{r}_0,t)} & si & t \in I \\ \delta & si & t \in [0,T] - I \end{array} \right\},$$

donde el conjunto I se define como:

$$I = \{ t \in [0,T] \mid g(\mathbf{r}_0,t) > 0 \}.$$

Si se asume que $g(\mathbf{r}_0,t)$ es una función de soporte compacto, entonces I se puede expresar como la unión de intervalos contenidos en $[0,T]$.

Con estas definiciones se puede enunciar el siguiente teorema de restricción suficiente.

TEOREMA 3. *Sea $\alpha > 0$ y $Q(t) \geq 0$ cualquier tasa de emisión de contaminantes en el sitio $\mathbf{r}_0$ tal que:*

$$Q(t) \leq \min\{\delta, G(t)\} \qquad \textit{para cada } t,$$

entonces se cumple que la concentración promedio del contaminante en una zona de importancia ecológica Ω no rebasa la concentración máxima admisible J_0.

DEMOSTRACIÓN:

$$\int_0^T g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt = \int_I g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt \leq \int_I g(\mathbf{r}_0,t)\frac{\alpha}{|\,I\,|\cdot g(\mathbf{r}_0,t)}dt \leq \frac{\alpha}{|\,I\,|}\int_I dt \leq \alpha,$$

si se considera (11) se obtiene que:

$$\mathbf{J}(\phi) = \int_0^T g(\mathbf{r}_0,t)Q(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r} \leq J_0.$$

Es importante notar que la elección de $Q(t) = \min\{\delta, G(t)\}$, es la menos restrictiva para la actividad industrial.

6. Generalización

La generalización de las restricciones a las tasas de emisión de contaminantes antes descritas para N fuentes industriales es inmediata.

Sean $\mathbf{r}_i$ para $i = 1..N$, los sitios de las fuentes puntuales de emisión de contaminantes, en este caso debemos restringir las tasas $Q_i(t)$ $i = 1..N$, de tal forma que se cumpla:

$$\mathbf{J}(\phi) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T g(\mathbf{r}_i,t)Q_i(t)dt + \int_D g(\mathbf{r},0)\phi^0(\mathbf{r})d\mathbf{r} \leq J_0.$$

Como antes se supone que el parámetro α definido en (11) es positivo.

Sean $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_N$, constantes positivas (pesos) tales que:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N = 1.$$

Cada constante γ_i representa la fracción que corresponde a la industria i del volumen total de contaminante que puede ser emitido cuando las empresas trabajan al 100% de su capacidad. Dicha constante está en función del tamaño de la empresa, por ejemplo, si sólo hay dos empresas en la región de estudio y la ubicada en $\mathbf{r}_2$ trabajando al 100% puede emitir dos veces más contaminantes que la ubicada en $\mathbf{r}_1$ trabajando tambien al 100%, entonces se definen los pesos como $\gamma_1 = \frac{1}{3}$ y $\gamma_2 = \frac{2}{3}$.

Para generalizar la primera restricción basada en la acotación de la norma se debe tomar:

$$\|Q_i\| \leq \frac{\gamma_i \cdot \alpha}{\|g(\mathbf{r}_i)\|}, \ \forall\, i = 1..N.$$

Con esto se establece :

$$(Q_i, g(\mathbf{r}_i)) \leq \|Q_i\| \, \|g(\mathbf{r}_i)\| \leq \frac{\gamma_i \cdot \alpha}{\|g(\mathbf{r}_i)\|} \|g(\mathbf{r}_i)\| = \gamma_i \cdot \alpha,$$

y sumando sobre esta desigualdad se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N}(Q_i, g(\mathbf{r}_i)) \leq \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cdot \alpha = \alpha,$$

finalmente si usamos (11) se llega al resultado buscado.

Para generalizar la segunda restricción basada en la forma de la tasa de emisión se debe tomar:

$$Q_i(t) \leq \gamma_i \cdot \min\{\delta_i, G_i(t)\} \quad para\ cada\ t\ y\ para\ cada\ i,$$

donde δ_i y G_i se definen para cada fuente puntual como en la sección anterior.

Con esto se tiene que:

$$\int_0^T g(\mathbf{r}_{i,}t)Q_i(t)dt = \int_{I_i} g(\mathbf{r}_{i,}t)Q_i(t)dt \leq \int_{I_i} g(\mathbf{r}_{i,}t)\frac{\gamma_i \cdot \alpha}{\mid I_i \mid \cdot g(\mathbf{r}_{i,}t)}dt \leq \frac{\alpha}{\mid I_i \mid} \cdot \gamma_i \int_{I_i} dt \leq \alpha \cdot \gamma_i,$$

y sumando se establece:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T g(\mathbf{r}_{i,}t)Q_i(t)dt \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha \cdot \gamma_i = \alpha,$$

finalmente aplicando (11) se tiene el resultado buscado.

7. Conclusiones

Con base en la solución g del modelo adjunto, que es posible calcular independientemente de los parámetros involucrados en el proceso de contaminación, se pueden definir restricciones a las tasas de las fuentes contaminantes que toman en cuenta: la zona ecológica Ω que se desea proteger, la concentración máxima del contaminante admisible J_0 en dicha zona, la restricción sanitaria en una vecindad que rodea cada fuente industrial de emisión de contaminantes y la capacidad máxima de emisión de cada fuente. Dado que es posible obtener por monitoreo la distribución inicial del contaminante ϕ^0 y la velocidad del viento dominante U en D, y además calcular a g en forma eficiente (Skiba 1993, 1995), será posible día a día planear la actividad industrial en base a las restricciones formuladas para proteger la región Ω.

Es particularmente importante para formular una restricción tomar en cuenta el parámetro α, ya que si es negativo según el modelo será imposible impedir que los niveles de contaminación rebasen el máximo admisible en Ω y si es igual a cero sera necesario parar toda actividad industrial en la zona. Sólo el caso $\alpha > 0$ permite formular restricciones donde las tasas de emisión de contaminantes son diferentes de cero y por lo tanto la actividad industrial puede continuar.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP-UNAM), el Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT-UNAM, proyecto IN122098).

REFERENCIAS

Achieser, N. I., 1992. Theory of Approximation. Dover Publications, Inc., New York, 306 p.

Cheney, E. W., 1966. Introduction to Approximation Theory. Chelsea Publishing Company, New York, 260 p.

Davydova-Belitskaya, V., and Yu. N. Skiba, 1998. Climate of Guadalajara City (Mexico), its Variation and Change within Latest 120 Years. *World Resource Review,* **11**, 258-270.

Davydova, B. V., Yu. N. Skiba, S. N. Bulgakov and A. Z. Martínez, 1999. Modelación Matemática de los Niveles de Contaminación en la Cd. de Guadalajara, Jalisco, México. Parte I. Microclima y Monitoreo de la Contaminación. (Aceptado para ser publicado en la *Revista Internacional de Contaminación Ambiental*, México).

Hadamard, J., 1923. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Dover Publications, Inc. 316 p.

Marchuk, G. I., 1982. Mathematical Issues of Industrial Effluent Optimization. *J. Meter. Soc. Japan,* **60**, 481-485.

Marchuk, G. I., 1986. Mathematical Models in Environmental Problems. Elsevier, New York, 510 p.

Marchuk, G. I. and Yu. N. Skiba, 1976. Numerical Calculation of the Conjugate Problem for a Model of the Thermal Interaction of the Atmosphere with the Ocean and Continents. *Izvestiya, Atmos. Ocean. Physics*, **12**, 279-284.

Penenko, V. V. and V. F. Raputa, 1983. Some Models for Optimizing the Operation of the Atmospheric-Pollution Sources. *Sov. Meteorol. Hidrology* , **2**, 46-54.

Skiba, Yu. N., 1993. Balanced and Absolutely Stable Implicit Schemes for the Main and the Adjoint Pollutant Transport Equations in Limited Area. *Rev. Int. Contam. Ambient.*, **9**, 39-51.

Skiba, Yu. N., 1995. Pollution Concentration Estimates in Ecological Important Zones. *In: Proceedings of the X World Clean Air Conference*, ESPOO-FINLAND, Helsinki, 3, Paper 525.

Skiba, Yu. N., 1997. Air Pollution Estimates. *World Resource Review.* **9**, 542-556.

Skiba, Yu. N., J. Adem and T. Morales-Acoltzi, 1996. Numerical Algorithm for the Adjoint Sensitivity Study of the Adem Ocean Thermodynamic Model. *Atmósfera*, **9**, 147-170.

Skiba, Yu. N. and D. Parra-Guevara, 1999. Mathematics of Oil Spills: Existence, Uniqueness and Stability of Solutions. *Geofísica Internacional,* **38**, 117-124.

Watson, G. A., 1980. *Approximation Theory and Numerical Methods.* John Wiley and Sons, 230 p.