

# MODELOS ANALÍTICOS FRACTALES PARA LAS PROPIEDADES HIDRÁULICAS DE SUELOS NO SATURADOS

## FRactal Analytical Models for the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils

Manuel Zavala<sup>1</sup>, Heber Saucedo<sup>2</sup>, Carlos Fuentes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas. Avenida Ramón López Velarde 801, Centro, 98000, Zacatecas, México. (mzavala73@yahoo.com.mx). <sup>2</sup>Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, 62550. Morelos, México. (hsaucedo@tlaloc.imta.mx, cfuentes@tlaloc.imta.mx).

### RESUMEN

La capacidad predictiva de los modelos mecanicistas de las propiedades hidráulicas de los suelos no saturados debe conocerse a detalle antes de desarrollar simulaciones de procesos de transferencia de agua en la zona vadosa del suelo. El objetivo de este estudio fue evaluar la flexibilidad de ajustar datos experimentales y la capacidad de predicción de tres modelos fractales para la curva de retención de humedad y la curva de conductividad hidráulica que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración (poro geométrico, poro neutro y poro grande). Los modelos consideran conceptos de geometría fractal, las leyes de Laplace, Poiseuille y Darcy, se estableció su nivel de descripción y su desempeño respecto de dos modelos mecanicistas tradicionales. La evaluación incluyó 208 suelos seleccionados de la base Unsaturated Soil Hydraulic Database, con los que se cubrieron nueve clases texturales. Series experimentales de retención de humedad se usaron para calibrar los parámetros de forma y escala de las funciones de retención. Los datos experimentales de conductividad hidráulica se usaron para validar los modelos fractales de conductividad. El análisis de correspondencia lineal, entre datos teóricos y experimentales, mostró que la capacidad predictiva de los modelos fractales para la conductividad relativa es buena, porque el coeficiente de determinación en las clases texturales fue positivo ( $>0.75$  y  $<0.86$ ). Así, al menos 75 % de la variabilidad de la conductividad lo explica el modelo de regresión ajustado. Los modelos fractales presentaron predicción mayor respecto a la de la combinación de modelos mecanicistas clásicos, usados en la física de suelos.

**Palabras clave:** conductividad hidráulica relativa, curva de retención de humedad, modelos fractales, ley de Laplace, ley de Poiseuille y ley de Darcy.

\* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: enero, 2018. Aprobado: septiembre, 2018.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 52: 1059-1070. 2018.

### ABSTRACT

The predictive capability of the mechanistic models of the hydraulic properties of unsaturated soils must be known in detail before developing simulations of water transfer processes in the vadose zone of the soil. The aim of this study was to evaluate the flexibility of adjusting experimental data and the predictive capability of three fractal models for the soil-water retention curve and the hydraulic conductivity curve that satisfy the integral properties of infiltration (geometric pore, neutral pore and large pore). The models consider concepts of fractal geometry, the Laplace and Poiseuille equations and Darcy's law; we established its level of description and performance in regard to two traditional mechanistic models. The evaluation included 208 soils selected from the Unsaturated Soil Hydraulic Database, which were used to cover nine texture types. The hydraulic conductivity experimental data were used to validate the conductivity fractal models. The linear correspondence analysis between theoretical and experimental data showed that the predictive capability of the fractal models for relative conductivity is good, since the coefficient of determination in the texture types was positive ( $>0.75$  y  $<0.86$ ). In this way, at least 75 % of the variability of the conductivity is explained by the adjusted regression model. The fractal models presented a higher prediction in regard to the combination of classic mechanistic models, used in soil physics.

**Key words:** relative hydraulic conductivity, soil-water retention curve, fractal models, Laplace equation, Poiseuille equation and Darcy's law.

### INTRODUCTION

The basic equation for the mechanistic study of water transfer processes in the unsaturated zone of the soil is established by combining

## INTRODUCCIÓN

La ecuación base para el estudio mecanicista de los procesos de transferencia de agua, en la zona no saturada del suelo, se establece combinando el principio general de conservación de la masa y la ley de Darcy-Buckingham. La aplicación de la ecuación de transferencia requiere representar las propiedades hidráulicas del suelo, con el contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ) expresado como función del potencial de presión ( $\psi$ ; curva de retención de humedad) y la conductividad hidráulica ( $K$ ), como función de  $\theta$  o  $\psi$  (curva de conductividad hidráulica). En la literatura existen modelos analíticos para describir las propiedades hidráulicas del suelo, los cuales varían conceptualmente y en sofisticación. Al respecto, Assouline y Or (2013) realizaron su revisión. Ese conjunto de modelos abarca funciones de pedotransferencia (Sobieraj *et al.* 2001, Wösten *et al.* 2001, Tóth *et al.*, 2015) y modelos mecanicistas basados en las leyes de Poiseuille y Laplace (Brooks y Corey 1964; van Genuchten 1980; Braddock *et al.*, 2001). El primer grupo de modelos se establece sin considerar explícitamente las bases físicas del movimiento del agua en el suelo, y el segundo grupo permite representar detalladamente los mecanismos fundamentales del proceso a partir de leyes físicas.

Modelos mecanicistas para las propiedades hidráulicas están disponibles en programas de cómputo que simulan el flujo del agua en suelos parcialmente saturados (Diersch, 2014). También se ha estudiado la capacidad descriptiva de grupos de modelos para las propiedades hidráulicas (Too *et al.*, 2014). Sin embargo, la justificación de los modelos en el contexto de la teoría de la infiltración se ha considerado limitadamente, ya que la mayoría de los análisis evalúa sólo su flexibilidad para describir datos experimentales de campo o laboratorio.

Fuentes *et al.* (1992) analizaron los modelos mecanicistas reportados en la literatura para algunas propiedades hidráulicas del suelo. Los autores demostraron que solo los modelos de Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982) y la curva de retención de van Genuchten (1980), sujeta a la restricción de Burdine (1953) y combinada con la curva de conductividad de Brooks y Corey (1964) satisfacen las propiedades integrales de la infiltración. Aunque la conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ) sea conocida, la aplicación de esos modelos requiere la estimación de

the general principle of mass conservation and the Darcy-Buckingham law. Applying the transfer equation requires a representation of the hydraulic properties of the soil, with the volumetric water content ( $\theta$ ) expressed as a function of the water pressure head in the soil ( $\psi$ ; soil-water retention curve) and hydraulic conductivity ( $K$ ), as a function of  $\theta$  or  $\psi$  (hydraulic conductivity curve). The bibliography contains analytical models to describe the hydraulic properties of the soil, which vary conceptually and in sophistication. Regarding this, Assouline and Or (2013) performed their revision. That set of models covers pedotransfer functions (Sobieraj *et al.* 2001, Wösten *et al.* 2001, Tóth *et al.*, 2015) and mechanistic models based on the Poiseuille and Laplace laws (Brooks and Corey 1964; van Genuchten 1980; Braddock *et al.*, 2001). The first group of models is established without explicitly considering the physical bases of water movement in the soil and the second group helps represent in detail the basic mechanisms of the process from laws of physics.

Mechanistic models for hydraulic properties are available in computer programs that simulate the water flow in the unsaturated zone (Diersch, 2014). The descriptive ability of groups of models for hydraulic properties was also studied (Too *et al.*, 2014). However, the rationale behind the models in the context of the theory of infiltration was considered to a limited extent, since most analyses evaluate only their flexibility to describe experimental data in the field or the lab.

Fuentes *et al.* (1992) analyzed the mechanistic models reported in the bibliography for some hydraulic properties of the soil. These authors showed that only the models by Fujita (1952) and Parlange *et al.* (1982) and van Genuchten's soil-water retention curve (van Genuchten, 1980), subjected to Burdine's restriction (Burdine, 1953), combined with Brooks and Corey's conductivity curve (Brooks and Corey, 1964), satisfy the integral properties of infiltration. Even if the hydraulic conductivity at a ( $K_s$ ) saturation is known, the application of these models requires the estimation of two shape and one scale parameter, simultaneous with experimental series of soil-water retention and hydraulic conductivity to determine them.

Fuentes *et al.* (2001) studied hydraulic conductivity based on the Poiseuille and Darcy laws

dos parámetros de forma y uno de escala, simultáneamente con series experimentales de retención de humedad y conductividad hidráulica para determinarlos.

Fuentes *et al.* (2001) estudiaron la conductividad hidráulica con base en las leyes de Poiseuille y Darcy y en el contexto de la geometría fractal, representando el espacio poroso del suelo como un sistema de capilares. Ellos obtuvieron un modelo conceptual que les permitió establecer, a partir del peso dado a los radios de los capilares en la resistencia al flujo del agua en el suelo, las relaciones fractales integrales denominadas poro neutro, poro geométrico y poro grande. El primer modelo correspondió a la relación integral para la conductividad de Burdine (1953) con un factor de corrección, el segundo a la relación de Mualem (1976) también con un factor de corrección y el tercero fue un modelo nuevo, establecido por los autores de ese estudio. Ellos consideraron restricciones particulares entre los parámetros de forma de la curva de retención de van Genuchten (1980) y derivaron las expresiones respectivas. Esas relaciones, particulares entre  $m$  y  $n$ , permitieron explicitar que las correcciones de los modelos analíticos para la conductividad derivadas por Van Genuchten (1980) dependen de la dimensión fractal del suelo. Los modelos fractales de Fuentes *et al.* (2001) para la conductividad hidráulica satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y con  $K_s$  conocida se deben determinar solo dos parámetros, uno es de forma y otro de escala, y se requiere solo la curva experimental de retención de humedad para estimarlos.

El objetivo de este estudio fue evaluar la capacidad descriptiva de los modelos fractales de Fuentes *et al.* (2001) denominados poro neutro, poro geométrico y poro grande, con información experimental de la base de datos UNSODA (Leij *et al.*, 1996; Nemes *et al.*, 2001). La evaluación consistió en calibrar los parámetros del modelo de retención de van Genuchten (1980) sujeto a sus restricciones, aplicar el modelo analítico para la conductividad hidráulica y comparar sus predicciones con los datos experimentales. La hipótesis fue que con la calibración de los dos parámetros que intervienen en los modelos fractales de retención de humedad pueden aplicarse las relaciones para conductividad hidráulica relativa del suelo, prediciendo con precisión la evolución de esta variable.

in the context of fractal geometry, representing the porous space of the soil as a system of capillaries. They obtained a conceptual model that helped them establish, using the weight given to the radii of the capillaries in the resistance to the flow of water in the soil, the integral fractal relations named neutral pore, geometric pore, and large pore. The first model corresponds to Burdine's integral relationship for hydraulic conductivity (Burdine, 1953) with a correction factor; the second, to the Mualem's relation (Mualem, 1976), also with a correction factor; and the third was a new model, established by the authors of the study. Taking into account particular constraints between the parameters of the shape of van Genuchten's soil-water retention curve (van Genuchten, 1980), analytical models for hydraulic conductivity were derived. These relations between  $m$  and  $n$ , helped explain that the corrections of the analytical models for conductivity derived by Van Genuchten (1980) depend on the fractal dimension of the soil. The fractal models by Fuentes *et al.* (2001) for hydraulic conductivity satisfy the integral properties of infiltration and with known  $K_s$  only two parameters must be determined, one of which is form, and the other scale, and only the experimental soil-water retention curve is required to calculate them.

The aim of this study was to evaluate the descriptive ability of the fractal models by Fuentes *et al.* (2001) named neutral pore, geometric pore and large pore, with experimental information from the UNSODA database (Leij *et al.*, 1996; Nemes *et al.*, 2001). The evaluation consisted in calibrating the parameters of van Genuchten's retention model (van Genuchten, 1980) subjected to its fractal restrictions, applying the analytical model for hydraulic conductivity and comparing its predictions with the experimental data. The hypothesis was that with the calibration of the two parameters that intervene in the soil-water retention fractal models, the relative hydraulic conductivity relations can be applied, accurately predicting the evolution of this variable.

## MATERIALS AND METHODS

The equation that describes the water transfer process in unsaturated soils is:

## MATERIALES Y MÉTODOS

La ecuación que describe los procesos de transferencia de agua en suelos parcialmente saturados es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K \nabla H] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - S \quad (1)$$

donde  $H = \psi - z$  es el potencial hidráulico [L];  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo [L];  $z$  es la coordenada vertical [L] positiva en sentido descendente;  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua [ $L^3 L^{-3}$ ] que es función del potencial de presión, relación conocida como curva de retención de humedad,  $K$  es la curva de conductividad hidráulica del suelo [ $LT^{-1}$ ] que es función de la presión o del contenido volumétrico de agua,  $\theta(\psi)$  y  $K(\theta)$  son también conocidas como las propiedades hidráulicas del suelo,  $S$  es el volumen de agua que extraen las raíces de las plantas por unidad de volumen de suelo en la unidad de tiempo [ $L^3 L^{-3} T^{-1}$ ];

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  es el operador gradiente [ $L^{-1}$ ]; y  $t$  es el tiempo [T].

Para considerar formalmente la relación existente entre la geometría del medio poroso y las propiedades hidráulicas del suelo, se deben tomar en cuenta dos leyes fundamentales:

1) Ley de Poiseuille, la cual relaciona modelos mecanicistas tradicionales la velocidad media del agua ( $v$ ) en un capilar cilíndrico de radio ( $r$ ) con el gradiente de la energía  $\nabla H$ :

$$v = -\frac{\rho_w g}{8\mu} r^2 \nabla H \quad (2)$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua [ $ML^{-3}$ ];  $\mu$  es la viscosidad dinámica [ $ML^{-1}T^{-1}$ ]; y  $g$  es la aceleración de la gravedad [ $LT^{-2}$ ].

2) Ley de Laplace, la cual relaciona el potencial de presión con el radio de curvatura  $r_c$  del menisco de agua en un poro de radio  $r$ :

$$\psi = -\frac{2\sigma}{\rho_w g r_c} \quad (3)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial en la interfaz agua-aire [ $MT^{-2}$ ]. Los radios de curvatura y poro se relacionan a través del ángulo de contacto  $\alpha$  que se tiene entre el menisco del agua y las partículas del suelo:  $r = r_c \cos \alpha$ .

Los modelos de Fuentes *et al.* (2001) se establecieron representando al suelo como un objeto fractal y considerando las

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K \nabla H] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - S \quad (1)$$

where  $H = \psi - z$  is the hydraulic head [L];  $\psi$  is the water pressure head in the soil [L];  $z$  is the positive vertical coordinate [L] in a descending direction;  $\theta$  is the volumetric water content [ $L^3 L^{-3}$ ] which is a function of the pressure head, a relation known as soil-water retention curve;  $K$  is the hydraulic conductivity curve of the soil [ $LT^{-1}$ ], which is a function of the pressure or the volumetric water content;  $\theta(\psi)$  and  $K(\theta)$  are also known as the hydraulic properties of the soil;  $S$  is the volume of water extracted by the plant roots per unit of volumetric soil in time unit [ $L^3 L^{-3} T^{-1}$ ];  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  is the gradient operator [ $L^{-1}$ ]; and  $t$  is time [T].

In order to formally consider the existing relation between the geometry of the porous soil and the hydraulic properties of the soil, two fundamental laws must be taken into consideration:

1) Poiseuille's law, which relates the mean water velocity ( $v$ ) in a cylindrical capillary of a radius ( $r$ ) with the energy gradient  $\nabla H$ :

$$v = -\frac{\rho_w g}{8\mu} r^2 \nabla H \quad (2)$$

where  $\rho_w$  is water density [ $ML^{-3}$ ];  $\mu$  is the dynamic viscosity [ $ML^{-1}T^{-1}$ ]; and  $g$  is the acceleration of gravity [ $LT^{-2}$ ].

2) Laplace's law, which relates the pressure head with the radius of curvature  $r_c$  of the meniscus of water in a pore with a radius of  $r$ :

$$\psi = -\frac{2\sigma}{\rho_w g r_c} \quad (3)$$

where  $\sigma$  is the surface tension in the water-air interface [ $MT^{-2}$ ]. The radii of curvature and pore are related through the angle of contact  $\alpha$  that exists between the meniscus of the water and the soil particles:  $r = r_c \cos \alpha$ .

The models by Fuentes *et al.* (2001) are established by representing the soil as a fractal object and considering equations (2) and (3). The analytical representations obtained by introducing van Genuchten's soil-water retention curve (van Genuchten, 1980) in the general fractal models of hydraulic conductivity  $K(S_f)$  are:

ecuaciones (2) y (3). Las representaciones analíticas obtenidas al introducir la curva de retención de van Genuchten (1980) en los modelos fractales generales de conductividad hidráulica  $K(S_e)$  son:

Modelo del poro geométrico:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= K(S_e) / K_s = \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm}\right]^2 \\ 0 < sm &= 1 - 2_s / n < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Modelo del poro neutro:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= k(S_e) / K_s = S_e^s \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm}\right] \\ 0 < sm &= 1 - 4_s / n < 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Modelo del poro grande:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= k(S_e) / K_s = \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{2sm}\right] \\ 0 < 2sm &= 1 - 4_s / n < 1 \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $m$  y  $n$  son parámetros de forma;  $\psi_d$  parámetro de escala de la presión [L];  $S_e(\psi) = [(\theta(\psi) - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)]$  es la saturación efectiva;  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación [ $L^3 L^{-3}$ ];  $\theta_r$  es el contenido volumétrico residual [ $L^3 L^{-3}$ ];  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación [ $LT^{-1}$ ];  $0 \leq K_r \leq 1$  es la conductividad hidráulica relativa;  $s$  es la dimensión cociente  $0 \leq s = D/E \leq 1$ , donde  $D$  es la dimensión fractal del objeto (suelo) y  $E$  es la dimensión del espacio de Euclides. En el estudio se estableció que la dimensión cociente del suelo es una función implícita de su porosidad volumétrica:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (7)$$

La ecuación (7) se resolvió con el método numérico de Newton-Raphson (Burden *et al.*, 2015) y para acelerar la convergencia del proceso de cálculo del valor de la dimensión cociente  $s$ , se usó como estimador inicial

$$s = \log \left[ \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \right] / \log \left[ \frac{1}{2} \right] \approx 0.6942 \quad \text{que corresponde a la solución exacta de la función para el valor particular de porosidad volumétrica } \phi = 1/2.$$

La evidencia experimental para calibrar y validar los modelos (4)-(6) se tomó de la base de datos UNSODA versión 2.0,

Model of the geometric pore:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= K(S_e) / K_s = \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm}\right]^2 \\ 0 < sm &= 1 - 2_s / n < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Model of the neutral pore:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= k(S_e) / K_s = S_e^s \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm}\right] \\ 0 < sm &= 1 - 4_s / n < 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Model of the large pore:

$$\begin{aligned} S_e(\psi) &= \left[1 + (\psi / \psi_d)^n\right]^{-m} \\ K_r &= k(S_e) / K_s = \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{2sm}\right] \\ 0 < 2sm &= 1 - 4_s / n < 1 \end{aligned} \quad (6)$$

where  $m$  and  $n$  are parameters of shape;  $\psi_d$  is the parameter of scale of the pressure [L];  $S_e(\psi) = [(\theta(\psi) - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)]$  is the effective saturation;  $\theta_s$  is the saturated water content [ $L^3 L^{-3}$ ];  $\theta_r$  is the residual water content [ $L^3 L^{-3}$ ];  $K_s$  is the saturated hydraulic conductivity [ $LT^{-1}$ ];  $0 \leq K_r \leq 1$  is the relative hydraulic conductivity;  $s$  is the relative dimension  $0 \leq s = D/E \leq 1$ , where  $D$  is the fractal dimension of the object (soil) and  $E$  is the dimension of the Euclidean space. The study established that the relative dimension of the soil is an implicit function within its volumetric porosity:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (7)$$

Equation (7) was solved with the Newton-Raphson numerical method (Burden *et al.*, 2015), and in order to accelerate the convergence of the calculation process for the relative dimension, the initial estimator of  $s = \log \left[ \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \right] / \log \left[ \frac{1}{2} \right] \approx 0.6942$  was used, which is the exact solution of the function for the particular value of the volumetric porosity  $\phi = 1/2$ .

The experimental evidence to calibrate and validate models (4)-(6) was taken from the UNSODA database version 2.0, presented by Nemes *et al.* (2001), who improved the original version, developed by Leij *et al.* (1996). Version 2.0 contains

presentada por Nemes *et al.* (2001) quienes mejoraron la versión original desarrollada por Leij *et al.* (1996). La versión 2.0 tiene información experimental de 790 suelos, abarcando las doce clases texturales definidas por el Departamento de Agricultura de los Estados Unidos (USDA, por sus siglas en inglés), con 184 arenas, 64 franco arenosos, 133 arenas francas, 52 franco-arcilloso-arenosos, 3 limos, 142 franco limosos, 36 franco arcillosos, 70 francos, 33 franco-arcilloso-limosos, 3 arcillas arenosas, 21 arcillas limosas y 39 arcillas.

De la información experimental en la base UNSODA se seleccionaron 208 suelos (Cuadro 1). Los suelos seleccionados presentaron información experimental de granulometría, retención de humedad  $\theta(\psi)$ , conductividad hidráulica  $K(\theta)$ , porosidad volumétrica ( $\phi$ ), contenido volumétrico a saturación ( $\theta_s$ ) y conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ). Otro criterio en la selección fue considerar solo suelos con datos experimentales de retención de humedad y conductividad hidráulica estimados a partir del análisis de procesos similares del flujo del agua en el suelo (pruebas de drenaje de suelos inicialmente húmedos o totalmente saturados), para que fueran compatibles ambas series experimentales y minimizar el efecto de la histéresis capilar que se acentúa en la curva de retención de humedad.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros  $m$  y  $\psi_d$  se determinaron para cada modelo de retención de humedad  $\theta(\psi) = (\theta_s - \theta_r)$

experimental información from 790 soils, covering the 12 textural classes defined by the United States Department of Agriculture (USDA), with 184 sands, 64 loamy sands, 133 sandy loams, 52 sandy-clay-loam, 3 silts, 142 silt loams, 36 clay loams, 70 loamy, 33 silty-clay-loam, 3 sandy clays, 21 silty clay and 39 clays.

From the experimental information in the UNSODA base, 208 soils were selected (Table 1). The soils selected presented experimental information on granulometry, soil-water retention  $\theta(\psi)$ , water conductivity  $K(\theta)$ , volumetric porosity ( $\phi$ ), saturated water content ( $\theta_s$ ) and saturated hydraulic conductivity ( $K_s$ ). Another criterion was to consider only soils with experimental data on soil-water retention and hydraulic conductivity estimated from the analysis of similar water flow processes in the soil (draying tests of unsaturated or saturated soils), so they were compatible between both experimental series and minimizing the effect of the capillary hysteresis that stands out in the soil-water retention curve.

## RESULTS AND DISCUSSION

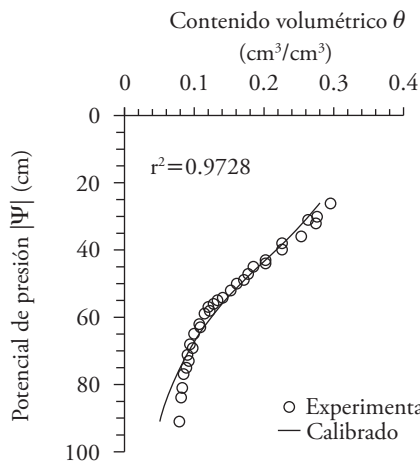
Parameters  $m$  and  $\psi_d$  were determined for each soil-water retention model  $\theta(\psi) = (\theta_s - \theta_r) S_e + \theta_r$ , using a non-linear regression analysis with retention functions (4)-(6) and the corresponding experimental information. These analyses considered the restrictions between specified parameters  $m$  and  $n$  and we assumed that  $\theta_r = 0$  (Haverkamp *et al.*, 2002).

**Cuadro 1. Suelos seleccionados de la base UNSODA.**  
**Table 1. Soils selected from the UNSODA database.**

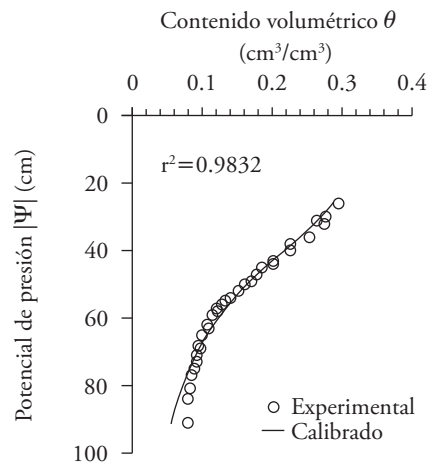
| Textura                       | Código del suelo   |
|-------------------------------|--|
| Arena (75)                    | 1014 1041 1042 1043 1050 1052 1053 1054 1060 1061 1063 1070 1071 1072 1073 1074 1075<br>1140 1141 1142 1240 1241 1460 1461 1462 1463 1464 1465 1466 1467 2100 2120 2121 2122<br>2123 2124 2125 2126 2210 2211 2212 2213 2217 2220 2221 2310 2540 2550 3070 3080 4000<br>4001 4021 4051 4052 4060 4061 4132 4140 4141 4142 4150 4151 4152 4440 4441 4443 4444<br>4445 4480 4490 4650 4651 4660 4661 |
| Franco limoso (40)            | 1280 1281 1282 1490 2491 2492 2493 3240 3242 3250 3252 3253 3260 3261 3262 3263 3264<br>4030 4031 4032 4033 4040 4041 4042 4043 4070 4071 4080 4082 4090 4091 4092 4180 4181<br>4182 4183 4570 4671 4672 4673  |
| Franco arenoso (31)           | 1091 1120 1121 1130 1131 1161 1380 1381 1390 1391 1392 2111 2130 2131 2132 2532 2541<br>2551 3050 4100 4110 4111 4112 4160 4161 4162 4170 4171 4172 4470 4500  |
| Arena franca (26)             | 1010 1011 1012 1013 1015 1051 1062 1090 1143 1160 2101 2102 2103 2104 2105 2110 4010<br>4011 4020 4050 4062 4130 4580 4581 4582 4583   |
| Arcilla (10)                  | 1162 1163 1181 1182 3281 3282 4120 4121 4680 4681  |
| Franco arcilloso arenoso (10) | 1092 1132 1164 1165 1166 1184 1382 2542 2552 4460  |
| Franco (8)                    | 1260 1261 2530 2531 4101 4102 4780 4790  |
| Franco arcilloso limoso (7)   | 1362 1371 2021 2022 3241 3251 4450   |
| Franco arcilloso (1)          | 1180   |

$S_e + \theta_r$ , a partir de análisis de regresión no lineal con las funciones de retención (4)-(6) y la información experimental correspondiente. En estos análisis se consideraron las restricciones entre los parámetros  $m$  y  $n$  especificadas y se asumió  $\theta_r = 0$  (Haverkamp *et al.*, 2002). En las Figuras 1a-1c se presentan los resultados de la calibración realizada para el suelo de textura arenosa denominado Grenoble (código 4444), que es un suelo cuyos datos experimentales se obtuvieron bajo condiciones controladas en laboratorio y tiene amplio uso en la literatura (Fuentes *et al.*, 1992; Bertolotti y Mayergoys, 2006). El mayor ajuste de datos se obtiene con el modelo del poro grande (6), lo que se comprueba con el coeficiente de determinación ( $r^2$ ) que se calcula con  $r^2 = \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \sigma_y^2$ , siendo  $\sigma_{xy}$  la covarianza de  $xy$  (experimental-ajustado),  $\sigma_x$  la desviación estándar de los datos experimentales, y  $\sigma_y$  la desviación estándar de los datos calibrados; también

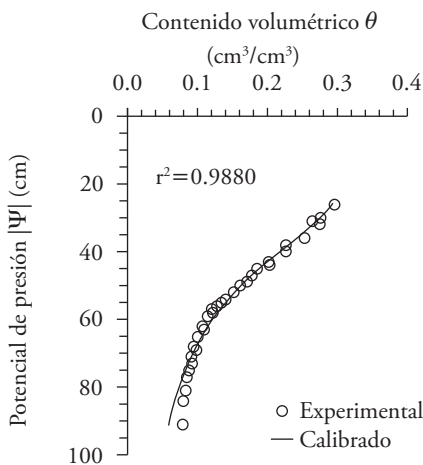
Figures 1a-1c show the results of the calibration performed for sandy soil named Grenoble (code 4444), which is a soil with experimental data obtained under controlled conditions in the laboratory, and it is widely used in the bibliography (Fuentes *et al.*, 1992; Bertolotti and Mayergoys, 2006). The greatest data adjustment is obtained using the large pore model (6), which is confirmed with the coefficient of determination ( $r^2$ ), calculated with  $r^2 = \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \sigma_y^2$ , where  $\sigma_{xy}$  is the covariance of  $xy$  (experimental-adjusted),  $\sigma_x$  is the standard deviation of experimental data, and  $\sigma_y$  is the standard deviation of calibrated data. We can also notice that the three models have a high ability to adjust experimental data, since they present values for  $r^2$  higher than 0.97. This ability to adjust to the fractal models of soil-water retention is similar to that displayed by the classic model by van Genuchten (1980) subjected to Mualem's restriction



A) Modelo del poro geométrico:  $m=0.871$  y  $\psi_d = -48.18$  cm.



B) Modelo del poro neutro:  $m=0.507$  y  $\psi_d = -39.61$  cm.



C) Modelo poro grande:  $m=0.352$  y  $\psi_d = -35.69$  cm.

**Figura 1. Ajuste de los datos experimentales de retención de humedad del suelo 4444 con  $\phi=0.370$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $s=0.667$ ,  $\theta_s=0.312$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> y  $\theta_r=0$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>.**

**Figure 1. Adjustment of the experimental data of water retention of the soil 4444 with  $\phi=0.370$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $s=0.667$ ,  $\theta_s=0.312$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> and  $\theta_r=0$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>.**

se puede notar que los tres modelos tienen capacidad alta para ajustar los datos experimentales ya que presentan valores de  $r^2$  superiores a 0.97. Esta capacidad de ajuste de los modelos fractales de retención de humedad es similar a la que exhibe el modelo clásico de van Genuchten (1980) sujeto a la restricción de Mualem (1976),  $0 < m = 1 - 1/n < 1$ . Yang y You (2013) usaron este modelo y obtuvieron para cuatro clases de suelo tipos de algoritmos inteligentes de optimización, ajustes que varían entre  $0.960 \leq r^2 \leq 0.997$ . Los parámetros de los análisis de regresión no lineal obtenidos con los datos de los primeros suelos analizados se presentan en el Cuadro 2.

Los modelos fractales de conductividad hidráulica (4)-(6) se aplicaron con los parámetros de la calibración, se comparó su predicción con los datos experimentales y se determinó el  $r^2$  por clase textural. La conductividad relativa ( $K_r$ ) se usó en lugar de la conductividad hidráulica ( $K$ ) porque la primera varía entre 0 y 1 en cualquier tipo de suelo, lo que simplifica el análisis. En el caso de la validación del suelo 4444, la predicción mejor se obtuvo con el modelo del poro geométrico, aunque esta se aproximó al resultado del modelo del poro grande (Figuras 2a-2c). La validación por clase textural de los 208 suelos del Cuadro 1 mostró que las predicciones de los modelos de conductividad relativa del poro geométrico, poro neutro y poro grande fueron estables y las diferencias

(1976),  $0 < m = 1 - 1/n < 1$ . Yang and You (2013) used this model and obtained, for four soil classes, types of intelligent optimization algorithms, adjustments that varied between  $0.960 \leq r^2 \leq 0.997$ . The parameters of non-linear regression models obtained with the data of the first soils analyzed are shown in Table 2.

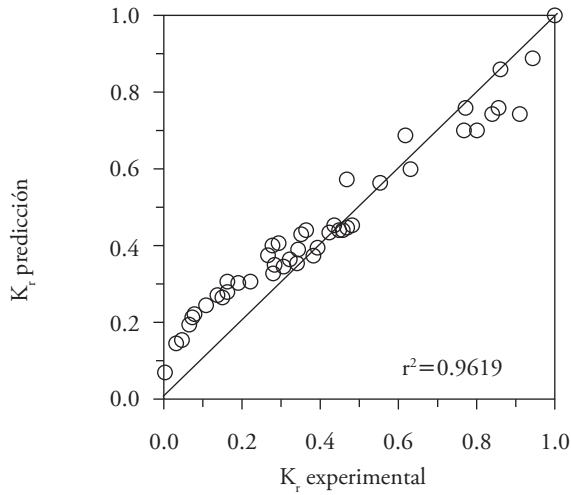
The fractal models of hydraulic conductivity (4)-(6) were applied with the calibration parameters, their prediction was compared to experimental data, and  $r^2$  was determined by textural class. Relative conductivity ( $K_r$ ) was used instead of hydraulic conductivity ( $K$ ) since the former varies between 0 and 1 in any type of soil, which simplifies analysis. In the case of the validation of soil 4444, the best prediction was obtained with the geometric pore model, although it came close to the result for the large pore model (Figures 2a-2c). The validation by textural type of the 208 soils of Table 1 showed that the predictions of the models of relative conductivity of the geometric, neutral and large pores were stable and the differences between them were minimum (Table 3). The three fractal models displayed an adequate predictive ability in most of the textural classes, although the values for volumetric porosity ( $\phi$ ) and saturated water content in UNSODA ( $\theta_s$ ) (Table 2) are different. This affects the prediction of the models evaluated because its parameters  $m$  and  $n$  depend on parameter  $s$ , which is a function of  $\phi$  (equation 7).

**Cuadro 2. Resultados de los análisis de regresión no lineal a los datos experimentales de retención de humedad de los primeros suelos analizados.**

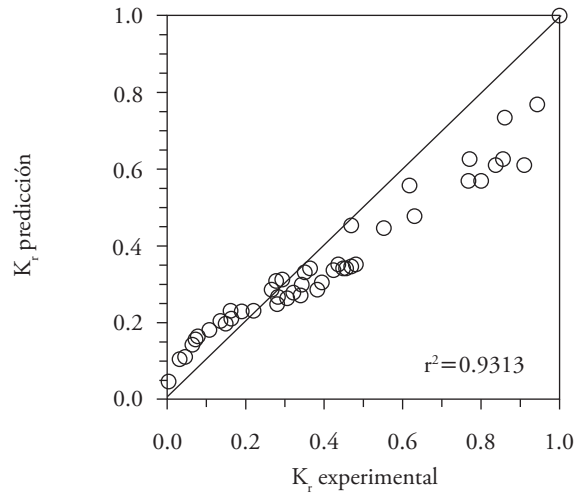
**Table 2. Results of the non-linear regression analyses on the experimental data of soil-water retention of the first soils analyzed.**

| ID   | $\phi$<br>cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> | $\theta_s$<br>cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> | s     | Poro geométrico<br>ecuación (4) |       | Poro neutro<br>ecuación (5) |       | Poro grande<br>ecuación (6) |       |
|------|--|--|-------|---------------------------------|-------|-----------------------------|-------|-----------------------------|-------|
|      |  |  |       | $\psi_d$                        | m     | $\psi_d$                    | m     | $\psi_d$                    | m     |
|      |  |  |       | cm                              | (-)   | cm                          | (-)   | cm                          | (-)   |
| 1010 | 0.390                                      | 0.384  | 0.670 | -23.10                          | 0.325 | -17.56                      | 0.167 | -17.18                      | 0.148 |
| 1011 | 0.433                                      | 0.411  | 0.680 | -25.38                          | 0.406 | -19.38                      | 0.212 | -18.91                      | 0.184 |
| 1012 | 0.474                                      | 0.381  | 0.688 | -22.03                          | 0.369 | -17.37                      | 0.196 | -17.04                      | 0.171 |
| 1013 | 0.442                                      | 0.376  | 0.682 | -24.19                          | 0.463 | -18.56                      | 0.243 | -18.04                      | 0.206 |
| 1014 | 0.446                                      | 0.361  | 0.682 | -29.16                          | 0.521 | -21.99                      | 0.273 | -21.09                      | 0.226 |
| 1015 | 0.346                                      | 0.262  | 0.662 | -14.15                          | 0.134 | -11.71                      | 0.067 | -11.66                      | 0.064 |
| 1041 | 0.429                                      | 0.330  | 0.679 | -39.01                          | 0.564 | -28.40                      | 0.290 | -26.95                      | 0.236 |
| 1042 | 0.395                                      | 0.340  | 0.672 | -41.50                          | 0.663 | -30.45                      | 0.346 | -28.44                      | 0.271 |
| 1043 | 0.390                                      | 0.320  | 0.671 | -48.36                          | 0.783 | -36.74                      | 0.424 | -33.70                      | 0.314 |
| 1050 | 0.396                                      | 0.384  | 0.672 | -13.49                          | 0.383 | -10.98                      | 0.204 | -10.77                      | 0.178 |
| 1051 | 0.400                                      | 0.389  | 0.673 | -8.80                           | 0.353 | -7.25                       | 0.188 | -7.19                       | 0.166 |
| 1052 | 0.415                                      | 0.365  | 0.676 | -8.08                           | 0.379 | -6.88                       | 0.207 | -6.87                       | 0.182 |
| 1053 | 0.419                                      | 0.366  | 0.677 | -9.67                           | 0.512 | -8.13                       | 0.289 | -8.02                       | 0.242 |
| 1054 | 0.419                                      | 0.367  | 0.677 | -12.19                          | 0.682 | -9.79                       | 0.390 | -9.30                       | 0.303 |
| 1060 | 0.415                                      | 0.361  | 0.676 | -16.62                          | 0.410 | -13.31                      | 0.219 | -13.07                      | 0.189 |

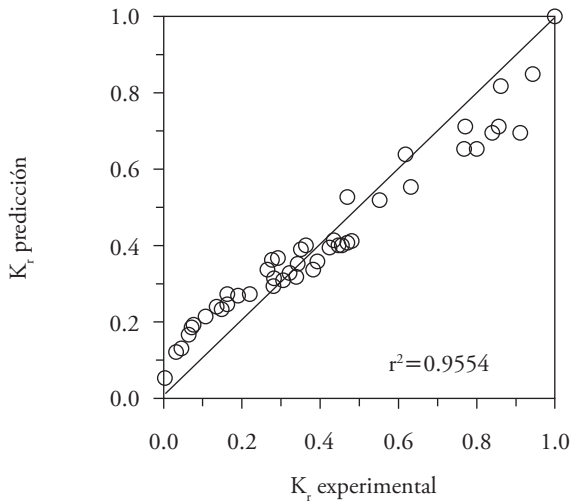




A) Poro gométrico:  $m=0.871$  y  $\psi_d=-49.18$  cm.



B) Poro neutro:  $m=0.507$  y  $\psi_d=-39.61$  cm.



C) Poro grande:  $m=0.352$  y  $\psi_d=-35.69$  cm.

**Figura 2. Validación de los modelos de conductividad fractal (4)-(6) considerando los datos experimentales de conductividad hidráulica relativa ( $K_r=K(\theta)/K_s$ ) del suelo Grenoble 4444:  $K_s=368.9$  cm/d y  $s=0.667$ .**

**Figure 2. Validation of the fractal conductivity models (4)-(6) considering the experimental data for relative hydraulic conductivity ( $K_r=K(\theta)/K_s$ ) of the Grenoble soil 4444:  $K_s=368.9$  cm/d and  $s=0.667$ .**

entre ellos fueron mínimas (Cuadro 3). Los tres modelos fractales exhibieron capacidad predictiva adecuada en la mayoría de las clases texturales, aunque los valores de porosidad volumétrica ( $\phi$ ) y contenido volumétrico de agua a saturación ( $\theta_s$ ) (Cuadro 2) reportados en UNSODA son diferentes. Esto impacta en la predicción de los modelos evaluados porque sus parámetros  $m$  y  $n$  son dependientes del parámetro  $s$ , que es función de  $\phi$  (ecuación 7).

El procedimiento de calibración y validación, descrito en este estudio, se aplicó para contrastar los niveles de predicción de los modelos fractales, considerando el modelo clásico de retención de humedad de van Genuchten (1980) sujeto a la restricción de Burdine (1953) combinado con el modelo de conductividad hidráulica de Brooks y Corey (1964). Este conjunto de funciones satisface las propiedades

The calibration and validation procedure described in this study was applied to contrast the prediction levels of the fractal models, considering van Genuchten's classical water retention model (van Genuchten, 1980), subjected to Burdine's restriction (Burdine, 1953) combined with Brooks and Corey's hydraulic conductivity model (Brooks and Corey, 1964). This set of functions satisfies the integral properties of the infiltration (Fuentes *et al.*, 1992) and it is used by analysts and modelers of water flows in the vadose zone of the soil:

$$S_e(\psi) = \left[ 1 + (\psi / \psi_d)^n \right]^{-m}$$

$$0 \leq m = 1 - 2/n \leq 1 \tag{8}$$

$$K_r = \frac{K(S_e)}{K_s} = S_e^{\eta}$$

**Cuadro 3. Coeficiente de determinación  $r^2$  por clase textural ( $K_{r\_experimental}$  vs  $K_{r\_modelo}$ ).**  
**Table 3. Coefficient of determination  $r^2$  by type of texture ( $K_{r\_experimental}$  vs  $K_{r\_modelo}$ ).**

| Textura                       | Modelos de conductividad hidráulica relativa |                  |                  |
|-------------------------------|--|------------------|------------------|
|                               | Poros geométrico (4)                         | Poros neutro (5) | Poros grande (6) |
| Arena (75)                    | 0.8641                                       | 0.8629           | 0.8626           |
| Franco limoso (40)            | 0.7946                                       | 0.7893           | 0.8008           |
| Franco arenoso (31)           | 0.7482                                       | 0.7503           | 0.7529           |
| Arena franca (26)             | 0.8697                                       | 0.8708           | 0.8710           |
| Arcilla (10)                  | 0.8850                                       | 0.8863           | 0.8858           |
| Franco arcilloso arenoso (10) | 0.7470                                       | 0.7621           | 0.7629           |
| Franco (8)                    | 0.8604                                       | 0.8495           | 0.8613           |
| Franco arcilloso limoso (7)   | 0.7998                                       | 0.7829           | 0.8010           |
| Franco arcilloso (1)          | 0.9953                                       | 0.9952           | 0.9953           |

integrales de la infiltración (Fuentes *et al.*, 1992) y lo usan analistas y modeladores del flujo de agua en la zona vadosa del suelo:

$$S_e(\psi) = \left[ 1 + (\psi / \psi_d)^n \right]^{-m}$$

$$0 \leq m = 1 - 2 / n \leq 1$$

$$K_r = \frac{K(S_e)}{K_s} = S_e^\eta$$
(8)

donde  $\eta$  es un parámetro de forma que debe calibrarse considerando los datos experimentales de conductividad hidráulica. Así, este exponente constituyó un parámetro adicional por determinar, respecto de los tres modelos fractales. Para eliminar  $\eta$  del proceso de calibración y hacer compatible la comparación de resultados, se retoma el análisis desarrollado por Fuentes *et al.* (2001) quienes establecieron que el exponente está relacionado con los parámetros de forma de la curva de retención de van Genuchten (1980) como sigue:

$$\eta = 2s \left( \frac{2}{mn} + 1 \right)$$
(9)

La ecuación de retención de humedad (8) se aplicó para ajustar los datos experimentales de contenido volumétrico de humedad de los suelos (Cuadro 1) y calcular los valores de  $m$  y  $\psi_d$ ; la ecuación (9) se usó para estimar  $\eta$  y con la ecuación de conductividad hidráulica relativa, de Brooks y Corey (8), se determinó por clase textural la correspondencia lineal entre datos modelados y datos experimentales (Cuadro 4).

where  $\eta$  is a parameter of shape that must be calibrated considering the experimental data for hydraulic conductivity. In this way, this exponent constituted an additional parameter to be determined in regard with the fractal models. To eliminate  $\eta$  from the calibration process and to make the comparison of results compatible, we pick up the analysis developed by Fuentes *et al.* (2001), who established that the exponent is related to van Genuchten's soil-water retention curve shape parameters as follows:

$$\eta = 2s \left( \frac{2}{mn} + 1 \right)$$
(9)

The water retention equation (8) was applied in order to adjust soil-water retention experimental data (Table 1) and to calculate the values of  $m$  and

**Cuadro 4. Coeficiente de determinación  $r^2$  por clase textural ( $K_{r\_experimental}$  respecto a  $K_{r\_modelo}$ ).**  
**Table 4. Coefficient of determination  $r^2$  by type of texture ( $K_{r\_experimental}$  vs  $K_{r\_modelo}$ ).**

| Textura                       | Ecuaciones (8) y (9) |
|-------------------------------|----------------------|
| Arena (75)                    | 0.8425               |
| Franco limoso (40)            | 0.8021               |
| Franco arenoso (31)           | 0.7498               |
| Arena franca (26)             | 0.8697               |
| Arcilla (10)                  | 0.8538               |
| Franco arcilloso arenoso (10) | 0.7760               |
| Franco (8)                    | 0.8381               |
| Franco arcilloso limoso (7)   | 0.7592               |
| Franco arcilloso (1)          | 0.9953               |

Los modelos fractales (Cuadro 3) mejoraron la descripción en ocho de las nueve clases texturales. Sólo en la textura franco-limosa los modelos clásicos (8) presentaron  $r^2$  mayor, pero con diferencia pequeña respecto del modelo del poro grande (0.8021 contra 0.8008).

## CONCLUSIONES

Las funciones analíticas de las curvas de retención de humedad de los modelos fractales poro geométrico, poro neutro y poro grande, con dos parámetros para calibrar, ajustan los datos experimentales de los suelos y se ajustan similarmente al modelo de retención clásico de van Genuchten (1980), sujeto a la restricción de Mualem (1976). Los modelos fractales para la conductividad hidráulica relativa describen satisfactoriamente el comportamiento de esta variable hidráulica en una gama de texturas de suelo e incluso presentan mejor nivel de predicción que el modelo clásico de Brooks y Corey (1964). Los tres modelos fractales son confiables y pueden considerarse en simulaciones del flujo de agua en la zona no saturada del suelo. El modelo del poro grande proporciona las predicciones mayores de la conductividad hidráulica relativa.

## LITERATURA CITADA

- Assouline, S., and D. Or. 2013. Conceptual and parametric representation of soil hydraulic properties: a review. *Vadose Zone J.* 12: 1-20.
- Berlotti, G., and I. Mayergoys. 2006. *The Science of Hysteresis*. Elsevier Academic Press. Great Britain. 751 p.
- Braddock, R. D., J. Y. Parlange, and H. Lee. 2001. Application of a soil water hysteresis model to simple water retention curves. *Transp. Porous Media* 44: 407-420.
- Brooks, R. H., and A. T. Corey. 1964. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. paper 3*, Colorado State University, Fort Collins. 27 p.
- Burden, R. L., J. D. Faires, and A. M. Burden. 2015. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Pub Co. 912 p.
- Burdine, N. T. 1953. Relative permeability calculation from size distribution data. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Pet. Eng.* 198: 71-78.
- Diersch, H. J. G. 2014. *FEFLOW – Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media*. Springer, Berlin Heidelberg. 996 p.
- Fuentes, C., R. Haverkamp, and J.Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on closed-form soilwater relationships. *J. Hydrol.* 134: 117-142.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.Y. Parlange, and R. Haverkamp. 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ing. Hidrául. Méx.* 16: 119-137.

$\psi_p$ ; equation (9) was used to estimate  $\eta$ , and using the relative hydraulic conductivity equation by Brooks and Corey (8), we determined, by texture class, the linear correspondence between modeled and experimental data (Table 4). The fractal models (Table 3) improved their description in eight of the nine textural classes. Only in the silt loam texture did the classic models (8) present a greater  $r^2$ , but with a small difference in comparison with large pore model (0.8021 *vs* 0.8008).

## CONCLUSIONS

The analytical functions of the soil-water retention curves of the geometric, neutral, and large pore fractal models, with two parameters to calibrate, adjust the experimental data of the soils and similarly adjust to van Genuchten's classic retention model (van Genuchten, 1980), subject to Mualem's restriction (Mualem, 1976). The fractal models for relative hydraulic conductivity satisfactorily describe the behavior of this hydraulic variable in a range of soil textures, and even present a better level of prediction than Brooks and Corey's classic model (Brooks and Corey, 1964). All three fractal models are reliable and can be taken into account in water flow simulations of the unsaturated area of the soil. The large pore model provides the greatest predictions of relative hydraulic conductivity.

—End of the English version—



- Fujita, H. 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. *Text. Res. J.* 22: 823-827.
- Haverkamp, R., P. Reggiani, P. J. Ross, and J. Y. Parlange. 2002. Soil water hysteresis prediction model based on theory and geometric scaling. *In: D. Smiles (ed). Heat and Mass Transfer in the Natural Environment: A tribute to J. R. Philip*. American Geophysical Union, Washington, D.C. pp: 213-246.
- Leij, F.J., W.J. Alves, M. Th. van Genuchten, and J. R. Williams. 1996. The UNSODA Unsaturated Soil Hydraulic Database: Res. Rep. 600 R-96 095. USEPA, Cincinnati, OH. 103 p.
- Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.* 12: 513-522.
- Nemes, A., M. G. Schaap, F. J. Leij, and J. H. M. Wösten. 2001. Description of the unsaturated soil hydraulic database UNSODA version 2.0. *J. Hydrol.* 251: 151-162.

- Parlange J.Y., I. Lisle, R. D. Braddock, and R. E. Smith. 1982. The three-parameter infiltration equation. *Soil Sci.* 133: 337-341.
- Sobieraj, J.A., H. Elsenbeer, and R. A. Vertessy. 2001. Pedotransfer functions for estimating saturated hydraulic conductivity: implications for modeling storm flow generation. *J. Hydrol.* 251: 202-220.
- Too, V. K., C. T. Omuto, E. K. Biamah, and J. P. Obiero. 2014. Review of soil water retention characteristic (SWRC) models between saturation and oven dryness. *Open J. Mod. Hydrol.* 4: 173-182.
- Tóth, B., M. Weynants, A. Nemes, A. Makó, G. Bilas, and G. Tóth. 2015. New generation of hydraulic pedotransfer functions for Europe. *Eur. J. Soil Sci.* 66: 226-238.
- van Genuchten, M. Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 44: 892-898.
- Wösten, J.H.M, Y. A. Pachepsky, and W. J. Rawls. 2001. Pedotransfer functions: bridging the gap between available basic soil data and missing soil hydraulic characteristics. *J. Hydrol.* 251: 123-150.
- Yang, X., and X. You. 2013. Estimating parameters of van Genuchten model for soil water retention curve by intelligent algorithms. *Appl. Math. Inf. Sci.* 7: 1977-1983.