

AJUSTE CON MOMENTOS L MÓVILES DE LA DISTRIBUCIÓN GVE CON PARÁMETROS VARIABLES DE UBICACIÓN Y ESCALA

FITTING WITH MOBILE L MOMENTS OF THE GEV DISTRIBUTION WITH VARIABLE LOCATION AND SCALE PARAMETERS

Daniel F. Campos-Aranda

Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Genaro Codina No. 240. 78280 San Luis Potosí, San Luis Potosí. (campos_aranda@hotmail.com)

RESUMEN

El análisis de frecuencias de datos hidrológicos máximos anuales como crecientes, intensidades de lluvia, nivel del mar, velocidades de viento y precipitación máxima diaria, considera que sus registros están integrados por valores independientes generados por un proceso aleatorio estacionario; por esto, sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo. La construcción de embalses, los efectos de la urbanización en las cuencas y el impacto del cambio climático regional originan en las series de datos hidrológicos máximos anuales tendencias y variabilidad no constante que las hacen no estacionarias. El objetivo de este estudio fue exponer el método de los momentos L móviles, para estimar los parámetros de ubicación (u) y escala (a) variables con el tiempo, empleada como covariable en la función de distribución de probabilidades General de Valores Extremos de tipo no estacionario (GVE_{11}), con parámetro de forma constante (k_m). Mediante funciones lineales o exponenciales se representó la variación en el tiempo de los parámetros u y a , para realizar predicciones que se asocian a ciertas probabilidades de no excedencia en el futuro (años 2050 o 2100). Con base en el error estándar de ajuste se aceptó o rechazó la distribución GVE_{11} como modelo probabilístico de series amplias de datos hidrológicos extremos que exhiben tendencia y variabilidad no constante. Por medio de dos aplicaciones numéricas se mostró el enfoque práctico del método de los momentos L móviles y a través de las predicciones para el futuro se destacó su importancia y utilidad, en los análisis probabilísticos de registros amplios, no estacionarios, del tipo citado (con tendencia y variabilidad no constante).

Palabras clave: distribuciones GVE estacionaria y no estacionaria, tendencia lineal, variabilidad respecto de la media, momentos L móviles, regresión lineal, error estándar de ajuste.

* Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: noviembre, 2017. Aprobado: enero, 2018.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 52: 933-950. 2018.

ABSTRACT

The frequency analysis of annual maximum hydrological data as floods, intensity of rainfall, sea level, wind speeds and daily maximum precipitation, considers that their records are integrated by independent values generated by a stationary random process; because of this, their properties do not change over time. The construction of reservoirs, the effects of urbanization in the basins and the impact of regional climate change result in annual maximum hydrological data series with trends and non-constant variability that make them non-stationary. The objective of this study was to expose the method of mobile L-moments, to estimate the parameters of location (u) and scale (a) variables with time, used as a covariate in the probability distribution function General Extreme Values of type non-stationary (GVE_{11}), with constant shape parameter (k_m). Through linear or exponential functions, the variation in time of the parameters u and a was plotted to make predictions that are associated with certain probabilities of non-exceedance in the future (years 2050 or 2100). Based on the standard error of fit, the GVE_{11} distribution was accepted or rejected as a probabilistic model of large series of extreme hydrological data that exhibit non-constant trend and variability. By means of two numerical applications, the practical approach of the mobile L-moments method was shown and, through predictions for the future, its importance and usefulness were highlighted in the probabilistic analyses of large, non-stationary records of the aforementioned type (with non-constant tendency and variability).

Key words: stationary and non-stationary GVE distributions, linear trend, variability with respect to the mean, mobile L-moments, linear regression, standard error of fit.

INTRODUCCIÓN

La planeación y dimensionamiento hidrológico de las obras hidráulicas se basa en las crecientes de diseño, que son predicciones asociadas a cierta probabilidad de no excedencia; con esto se brinda seguridad al diseño hidrológico. Este es el caso de los diques de protección, encauzamientos y rectificaciones, puentes y drenaje pluvial urbano. En los embalses de aprovechamiento o control también son necesarias las crecientes de diseño, durante sus etapas de construcción y de operación (Jakob, 2013).

La estimación hidrológica de las crecientes de diseño tiene dos enfoques, el determinístico y el probabilístico. El primero establece una tormenta de diseño que se transforma con modelación matemática del proceso lluvia–escurrimiento en el hidrograma. En el segundo enfoque se ajusta un modelo probabilístico al registro de gastos máximos anuales y se realizan las inferencias buscadas. En ambos enfoques, el análisis hidrológico de frecuencias (AHF) es necesario para obtener predicciones de intensidades de lluvia, precipitación máxima diaria y gasto máximo anual (Katz, 2013).

El AHF utiliza una función de distribución de probabilidades (FDP) para representar a la muestra disponible de datos máximos anuales. El procedimiento engloba cinco etapas (Rao y Hamed, 2000; Meylan *et al.*, 2012): 1) recopilación de los datos y verificación de su calidad estadística, 2) selección de una FDP, 3) aplicación de uno o varios métodos de estimación de sus parámetros de ajuste, 4) cuantificación objetiva del ajuste logrado con cada FDP y técnica de estimación de parámetros y, 5) selección de resultados.

El AHF se basa en el supuesto de estacionariedad, de un clima y una cuenca que no cambian con el tiempo en el sentido estadístico. Por esto se acepta que los registros disponibles de datos hidrológicos máximos anuales sean independientes y estén idénticamente distribuidos, condición denominada “iid”. El impacto del cambio climático global se ha verificado y en muchas cuencas del planeta han ocurrido cambios físicos originados por la construcción de embalses y la urbanización. Estas dos condiciones físicas han generado modificaciones del ciclo hidrológico, con incrementos en la frecuencia e intensidad de los eventos extremos de precipitación por el clima y reducción o aumento del escurrimiento en las cuencas.

INTRODUCTION

The hydrological planning and sizing of hydraulic works is based on floods design, which are predictions associated with a certain probability of non-exceedance; with this, accuracy is provided to the hydrological design. This is the case of the protection dams, canalizations and rectifications, bridges and urban pluvial drainage. In the use or control of reservoirs, the floods of design are also necessary during their construction and operation stages (Jakob, 2013).

The hydrological estimation of the floods design has two approaches, the deterministic and the probabilistic one. The first establishes a storm of design, transformed with a mathematical modeling of the rainfall-runoff process in the hydrograph. In the second approach, a probabilistic model is fitted to the record of annual maximum flows and the inferences sought are made. In both approaches, hydrological frequency analysis (AHF) is necessary to obtain predictions of rainfall intensities, maximum daily precipitation and maximum annual flow (Katz, 2013).

The AHF uses a probability distribution function (FDP) to represent the available sample of maximum annual data. The procedure encompasses five stages (Rao and Hamed, 2000; Meylan *et al.*, 2012): 1) data collection and verification of their statistical quality, 2) selection of one FDP, 3) application of one or several estimation methods of their fit parameters, 4) objective quantification of the fit achieved with each FDP and parameter estimation technique, and 5) selection of results.

AHF based on the assumption of stationarity, of a climate and a basin that does not change with the time in the statistical sense. It is therefore accepted that the available records of maximum annual hydrological data are independent and are identically distributed, a condition called “iid”. The impact of global climate change was verified and in many basins of the planet there were physical changes caused by the construction of reservoirs and urbanization. These two physical conditions have generated modifications of the hydrological cycle, with increases in the frequency and intensity of extreme events of precipitation due to the climate and reduction or increase of runoff in the basins. These changes in short periods have produced

Esos cambios en periodos cortos han producido tendencias, saltos y variabilidad diferente en los registros de datos hidrológicos máximos, transformándolos en no estacionarios (Jakob, 2013; Katz, 2013; Kim *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval, 2016).

Los enfoques del AHF de registros no estacionarios los describieron Khaliq *et al.* (2006). Uno de esos enfoques, quizás el más simple, consiste en una extensión de la teoría de valores extremos y por ello aplica la FDP clásica de estos procedimientos; la distribución General de Valores Extremos (GVE) con tres parámetros (u , a , k), permite el ajuste gradual al introducir el tiempo t como una covariable en sus parámetros de ubicación u y escala a y conserva constante el de forma k (Park *et al.*, 2011; Jakob, 2013; Katz, 2013). Los AHF con esta FDP no estacionaria permiten estimar crecientes de diseño al término de la vida útil de la obra hidráulica, en 2050 o 2100 (Mudersbach y Jensen, 2010 a, b; Franks *et al.*, 2015). El Adlouni *et al.* (2007) y Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2009) establecieron una nomenclatura para esas FDP no estacionarias y definieron la función GVE estacionaria como GVE_0 , con su parámetro de ubicación variable linealmente con el tiempo ($u=\alpha_1+\alpha_2\cdot t$) GVE_1 y GVE_2 cuando la variación es cuadrática ($u=\alpha_1+\alpha_2\cdot t+\alpha_3\cdot t^2$). En el modelo GVE_{11} los parámetros de ubicación y de escala varían linealmente con el tiempo.

El objetivo de este estudio fue exponer el método de los momentos L móviles para estimar los parámetros de ajuste de FDP no estacionaria GVE_{11} , que fue propuesto por Cunderlik y Burn (2003) y aplicado por Mudersbach y Jensen (2010 a, b). Por medio del error estándar de ajuste se aceptó o rechazó la distribución GVE_{11} para modelar probabilísticamente series anuales amplias de datos hidrológicos extremos que presentan tendencia y variabilidad no constante. Dos aplicaciones numéricas se describen con datos procedentes de la literatura especializada; los resultados destacan la simplicidad y utilidad del método de los momentos L móviles para el ajuste de la FDP no estacionaria GVE_{11} , en registros del tipo citado.

MATERIALES Y MÉTODOS

Momentos L poblacionales y de la muestra

La teoría y aplicación de los momentos L, como sistema alternativo para describir las formas de las FDP, las expuso Hosking (1990).

trends, jumps and different variability in the records of maximum hydrological data, transforming them into non-stationary (Jakob, 2013; Katz, 2013; Kim *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín and Escalante-Sandoval, 2016).

The AHF approaches of non-stationary records were described by Khaliq *et al.* (2006). One of these approaches, perhaps the simplest one, consists of an extension of the theory of extreme values and therefore applies the classical FDP of these procedures. The General Extreme Values Distribution (GVE) with three parameters (u , a , k), allows the gradual fit when introducing time t as a covariate in its location parameters u and scale a and keeps constant the shape k (Park *et al.*, 2011; Jakob, 2013; Katz, 2013). The AHFs with this non-stationary FDP allow estimating floods of design at the end of the useful life of the hydraulic work, in 2050 or 2100 (Mudersbach and Jensen, 2010 a, b; Franks *et al.*, 2015). El Adlouni *et al.* (2007) and Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2009) established a nomenclature for these non-stationary FDPs and defined the stationary GVE function as GVE_0 , with its location parameter linearly variable with time ($u=\alpha_1+\alpha_2\cdot t$) GVE_1 and GVE_2 when the variation is quadratic ($u=\alpha_1+\alpha_2\cdot t+\alpha_3\cdot t^2$). In the GVE_{11} the location and scale parameters vary linearly with the time.

The objective of this study was to expose the method of the mobile L-moments to estimate the fit parameters of FDP non-stationary GVE_{11} , which was proposed by Cunderlik and Burn (2003) and applied by Mudersbach and Jensen (2010 a, b). By means of the standard error of fit, the GVE_{11} distribution was accepted or rejected to probabilistically model large annual series of extreme hydrological data that present non-constant trend and variability. Two numerical applications are described with data from the specialized literature. The results highlight the simplicity and usefulness of the mobile L-moments method for the FDP fit non-stationary GVE_{11} , in records of the aforementioned type.

MATERIALS AND METHODS

Population and sample L-moments

The theory and application of the L-moments, as an alternative system to describe the forms of the FDPs, were presented by Hosking (1990). L-moments are linear combinations of probability weighted moments (*MPP*),

Los momentos L son combinaciones lineales de los momentos de probabilidad pesada (MPP), desarrollados por Greenwood *et al.* (1979), y se definen, para una variable aleatoria x con FDP acumulada $F(x)$ y función de cuantiles $x(F)$ como:

$$M_{p,r,s} = E\left\{x(F)^p F(x)^r [1-F(x)]^s\right\} \quad (1)$$

La expresión del momento: $\beta_r = M_{1,r,0}$ es:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F) \cdot F^r dF \quad (2)$$

La definición ordinaria de momentos es:

$$E(X^r) = \int_0^1 [x(F)]^r dF \quad (3)$$

Al compararla con la ecuación anterior se deduce que la definición convencional de momentos involucra potencias sucesivas de la función de cuantiles $x(F)$ y que los MPP implican potencias sucesivas de F , y por ello pueden considerarse como integrales de $x(F)$ ponderadas por polinomios F , de ahí su nombre. Los MPP mejoran notablemente las propiedades del muestreo porque los valores extremos o dispersos no los influyen (Asquith, 2011). Los primeros tres momentos L poblacionales corresponden a (Hosking, 1990; Hosking y Wallis, 1997):

$$\lambda_1 = \beta_0 \quad (4)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (5)$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0 \quad (6)$$

En una muestra de tamaño n , con sus elementos en orden ascendente ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) los estimadores insesgados de β_r son (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking y Wallis, 1997):

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_j \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2)}{(n-1) \cdot (n-2)} x_j \quad (9)$$

Los estimadores muestrales de λ_r serán l_r y las ecuaciones 4 a 6 los definen.

desarrollados por Greenwood *et al.* (1979), and are defined, for a random variable x with accumulated FDP $F(x)$ and function of quantiles $x(F)$ as:

$$M_{p,r,s} = E\left\{x(F)^p F(x)^r [1-F(x)]^s\right\} \quad (1)$$

The expression of the moment: $\beta_r = M_{1,r,0}$ is:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F) \cdot F^r dF \quad (2)$$

The ordinary definition of moments is:

$$E(X^r) = \int_0^1 [x(F)]^r dF \quad (3)$$

When compared with the previous equation, it follows that the conventional definition of moments involves successive powers of the function of quantiles $x(F)$ and that the MPPs imply successive powers of F , and therefore can be considered as integrals of $x(F)$ weighted by polynomials F , hence its name. MPPs significantly improve the sampling properties because extreme or scattered values do not influence them (Asquith, 2011). The first three population L-moments correspond to (Hosking, 1990; Hosking and Wallis, 1997):

$$\lambda_1 = \beta_0 \quad (4)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (5)$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0 \quad (6)$$

In a sample of size n , with its elements in ascending order ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) the unbiased estimators of β_r are (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking and Wallis, 1997):

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_j \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2)}{(n-1) \cdot (n-2)} x_j \quad (9)$$

The sampling estimators of λ_r will be l_r and the equations 4 to 6 define them.

Ajuste con momentos L de la distribución GVE₀

La distribución GVE ahora es el modelo probabilístico básico de los AHF de datos máximos y mínimos, como gastos, lluvias, niveles, temperaturas y vientos. Hosking y Wallis (1997) y El Adlouni *et al.* (2008) destacaron que la aceptación de la función GVE se debe a que cuando su parámetro de forma es negativo ($k < 0$) tiene su cola derecha más gruesa o densa que las otras FDP, que por lo común se utilizan en los AHF; además, tiene límite superior cuando $k > 0$ y define a la distribución Gumbel de dos parámetros, cuando $k = 0$. Por lo anterior, su intervalo de aplicación en x es: $u + a/k \leq x < \infty$ si $k < 0$; $-\infty < x < \infty$ si $k = 0$ y $-\infty < x \leq u + a/k$ si $k > 0$.

La solución inversa $x(F)$ de la distribución GVE₀ es la siguiente, con ella se estiman las predicciones que se asocian a una cierta probabilidad de no excedencia (F) y las ecuaciones que permiten estimar sus tres parámetros de ajuste (u, a, k) correspondientes a la ubicación, escala y forma, con el método de momentos L son:

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (-\ln F)^k]; k \neq 0 \tag{10}$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \tag{11}$$

donde:

$$c = \frac{2}{3 + (l_3 / l_2)} - 0.63093 \tag{12}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1 - 2^{-k})} \tag{13}$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \tag{14}$$

Para estimar la función Gamma se utilizó la fórmula de Stirling (Davis, 1972):

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \tag{15}$$

Verificación de la no estacionariedad del registro

Una serie cronológica de datos hidrológicos máximos es estacionaria si está libre de tendencias, saltos o periodicidad. Lo anterior implica que los parámetros estadísticos de esa serie, como

Fit with L-moments of the distribution GVE₀

The GVE distribution is now the basic probabilistic model of the AHFs of maximum and minimum data, such as flows, rainfalls, levels, temperatures and winds. Hosking and Wallis (1997) and El Adlouni *et al.* (2008) highlighted that acceptance of the GVE function is due to the fact that when its form parameter is negative ($k < 0$) has its right tail thicker or denser than the other FDPs, which are usually used in AHFs; in addition, it has an upper limit when $k > 0$ and defines the Gumbel distribution of two parameters, when $k = 0$. Therefore, its application interval in x is: $u + a/k \leq x < \infty$ si $k < 0$; $-\infty < x < \infty$ si $k = 0$ y $-\infty < x \leq u + a/k$ si $k > 0$.

The inverse solution $x(F)$ of the GVE₀ distribution is as follows, with it, predictions associated with a certain probability of non-exceedance (F) are estimated and the equations that allow us to estimate their three fit parameters (u, a, k) corresponding to the location, scale and shape, with the L- moments method are:

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (-\ln F)^k]; k \neq 0 \tag{10}$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \tag{11}$$

where:

$$c = \frac{2}{3 + (l_3 / l_2)} - 0.63093 \tag{12}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1 - 2^{-k})} \tag{13}$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \tag{14}$$

To estimate the Gamma function the Stirling formula was used (Davis, 1972):

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \tag{15}$$

Verification of the record non-stationarity

A chronological series of maximum hydrological data is stationary if it is free of trends, jumps or periodicity. This implies that the statistical parameters of that series, such as the mean and variance, are basically constant over time; otherwise, the series will not be stationary (Cunderlik and Burn, 2003; Khaliq *et al.*, 2003). Mudersbach and Jensen (2010 a) indicated that the study

la media y la varianza, son básicamente constantes a través del tiempo; de otra manera, la serie no será estacionaria (Cunderlik y Burn, 2003; Khaliq *et al.*, 2003). Mudersbach y Jensen (2010 a) indicaron que el estudio de los momentos de orden mayor, como la asimetría, es innecesario porque es poco probable que esa propiedad varíe con el tiempo, pero en un registro no estacionario los parámetros de ubicación y escala de una FDP seguramente cambiarán en el tiempo.

Campos-Aranda (2015) estimó la tendencia lineal con varios métodos y verificó si es estadísticamente diferente de cero. El cambio en la varianza se probó con una versión simplificada del procedimiento sugerido por Al Saji *et al.* (2015). Este consistente en restar a cada dato la tendencia lineal estimada y elevarlas al cuadrado, para observar si son relativamente constantes o presentan épocas con variabilidad alta y baja. Lo anterior permitió concluir que el registro no es estacionario en la varianza.

Ajuste con momentos L móviles de la distribución GVE₁₁

La distribución GVE no estacionaria, con sus parámetros de ubicación (u) y escala (a) variables en el tiempo (t), está indicada en registros amplios de datos máximos anuales con tendencia y variabilidad no constante (Cunderlik y Burn, 2003). La variación lineal o exponencial de u y a se recomienda por su ajuste sencillo y la facilidad que brinda a la extrapolación, esto es (Mudersbach y Jensen, 2010 a, b):

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t \tag{16}$$

$$a(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot t \tag{17}$$

$$u(t) = \gamma_0 \cdot \exp(\gamma_1 \cdot t) \tag{18}$$

$$a(t) = \delta_0 \cdot \exp(\delta_1 \cdot t) \tag{19}$$

En el método de los momentos L móviles se emplea una ventana corrediza en el tiempo (sliding time window), con longitud en años n que se desliza año con año a través del registro de datos máximos de tamaño n_t . La anchura de la ventana (n) se seleccionará de manera que en esa amplitud del registro pueda considerarse estacionario y entonces el número de ventanas (nv) por procesar será:

$$nv = n_t - n \tag{20}$$

Para cada tramo del registro de las nv ventanas móviles se calculan sus parámetros de ubicación y escala con base en las ecuaciones 11 a 15. Las dos series cronológicas que se obtengan

of higher-order moments, such as asymmetry, is unnecessary because it is unlikely that this property will vary over time, but in a non-stationary record, the location and scale parameters of an FDP will surely change over time.

Campos-Aranda (2015) estimated the linear trend with several methods and verified if it is statistically different from zero. The change in variance was tested with a simplified version of the procedure suggested by Al Saji *et al.* (2015). This change consists of subtracting from each data the estimated linear trend and square them, to observe if they are relatively constant or have periods with high and low variability. This allowed us to conclude that the record is not stationary in the variance.

Fitting with mobile L-moments of the GVE₁₁ distribution

The non-stationary GVE distribution, with its parameters of location (u) and scale (a) variables in time (t), is indicated in large records of maximum annual data with non-constant trend and variability (Cunderlik and Burn, 2003). The linear or exponential variation of u and a is recommended because of its simple fitting and the ease of extrapolation, that is (Mudersbach and Jensen, 2010 a, b):

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t \tag{16}$$

$$a(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot t \tag{17}$$

$$u(t) = \gamma_0 \cdot \exp(\gamma_1 \cdot t) \tag{18}$$

$$a(t) = \delta_0 \cdot \exp(\delta_1 \cdot t) \tag{19}$$

In the mobile L-moments method a sliding time window is used, with length in years n that slides year after year through the record of maximum data of size n_t . The width of the window (n) will be selected so that in that amplitude of the record it can be considered stationary and then the number of windows (nv) to be processed will be:

$$nv = n_t - n \tag{20}$$

For each section of the record of the nv mobile windows its location and scale parameters are calculated based on equations 11 to 15. The two chronological series obtained will be nonparametric functions that cannot be extrapolated to the future and that will be characterized by their average values: u_m , a_m and k_m . By adjusting to the chronological series of u the models defined by equations 16 and 18 and the series of a , those of equations 17 and 19, parametric descriptions of the mobile

serán funciones no paramétricas que no podrán extrapolarse al futuro y que se caracterizarán por sus valores promedio: u_m , a_m y k_m . Al ajustar a la serie cronológica de u los modelos definidos por las ecuaciones 16 y 18 y la serie de a , los de las ecuaciones 17 y 19, se definen descripciones paramétricas de los parámetros móviles, cuya calidad de ajuste se mide con el error estándar medio, expresado como:

$$EEM_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=n+1}^{n_t} [u(t) - \hat{u}(t)]^2}{nv - 2}} \tag{21}$$

$$EEM_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=n+1}^{n_t} [a(t) - \hat{a}(t)]^2}{nv - 2}} \tag{22}$$

En las expresiones anteriores, los valores estimados $[\hat{u}(t), \hat{a}(t)]$ se calculan con las ecuaciones 16 a 19, previa evaluación de sus coeficientes de ajuste obtenidos haciendo mínimos los cuadrados de los residuos. Para la variación lineal y exponencial del parámetro de ubicación $[u(t)]$ se calculan con las expresiones siguientes:

$$\bar{t} = \frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} t_i \tag{23}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} u_i \cdot i - u_m \cdot \bar{t}}{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} i^2 - \bar{t}^2} \tag{24}$$

$$\alpha_0 = u_m - \alpha_1 \cdot \bar{t} \tag{25}$$

$$\overline{\ln u} = \frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} \ln(u_i) \tag{26}$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} \ln(u_i) \cdot i - \overline{\ln u} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} i^2 - \bar{t}^2} \tag{27}$$

$$\gamma_0 = \exp(\overline{\ln u} - \gamma_1 \cdot \bar{t}) \tag{28}$$

En las expresiones anteriores “ln” es el logaritmo natural y “exp” la función exponencial, es decir, el número e elevado al valor del paréntesis. Cambiando en las ecuaciones 24 a 27, u_i por a_i y u_m por a_m se estiman los coeficientes β y δ de las ecuaciones 17 y 19.

parameters are defined, whose quality of fit is measured with the mean standard error, expressed as:

$$EEM_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=n+1}^{n_t} [u(t) - \hat{u}(t)]^2}{nv - 2}} \tag{21}$$

$$EEM_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=n+1}^{n_t} [a(t) - \hat{a}(t)]^2}{nv - 2}} \tag{22}$$

In the previous expressions, the estimated values $[\hat{u}(t), \hat{a}(t)]$ are calculated with equations 16 to 19, previous evaluation of their fit coefficients obtained by minimizing the squares of the residuals. For the linear and exponential variation of the location parameter $[u(t)]$ the values are calculated with the following expressions:

$$\bar{t} = \frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} t_i \tag{23}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} u_i \cdot i - u_m \cdot \bar{t}}{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} i^2 - \bar{t}^2} \tag{24}$$

$$\alpha_0 = u_m - \alpha_1 \cdot \bar{t} \tag{25}$$

$$\overline{\ln u} = \frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} \ln(u_i) \tag{26}$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} \ln(u_i) \cdot i - \overline{\ln u} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{nv} \sum_{i=n+1}^{n_t} i^2 - \bar{t}^2} \tag{27}$$

$$\gamma_0 = \exp(\overline{\ln u} - \gamma_1 \cdot \bar{t}) \tag{28}$$

In the above expressions “ln” is the natural logarithm and “exp” the exponential function, that is, the number e raised to the value of the parentheses. Changing in the equations 24 to 27, u_i by a_i and u_m by a_m , the coefficients β and δ of equations 17 and 19 are estimated.

For the predictions of a certain design return period ($T\bar{r}$) in years, estimated in a certain future time, commonly the years 2025, 2050 and 2100, equation 10 is applied with k_m and the following values of the probability of non-exceedance (F) and of

Para las predicciones de cierto periodo de retorno de diseño (Tr) en años, estimadas en un cierto tiempo futuro, comúnmente los años 2025, 2050 y 2100, se aplica la ecuación 10, con k_m y los valores siguientes de la probabilidad de no excedencia (F) y del tiempo final (T_f), en los parámetros de ubicación y escala (ecuaciones 16 a 19), por lo que habrá predicciones con la extrapolación lineal y con la exponencial:

$$F = 1 - \frac{1}{Tr} \tag{29}$$

$$T_f = n_i + (AFP - AFR) \tag{30}$$

donde AFP y AFR son los años finales de la predicción (2025, 2050 ó 2100) y del registro.

Error estándar de ajuste

A mediados de la década de los años setenta se estableció al error estándar de ajuste (EEA) como indicador estadístico cuantitativo de la calidad del ajuste logrado entre los datos y las predicciones con la FDP que se prueba, ya que evalúa la desviación estándar de esas diferencias. En el presente estudio la FDP que se prueba es la distribución no estacionaria GVE_{11} y su expresión es la siguiente (Kite, 1977; Pandey y Nguyen, 1999):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_i} (X_i - \hat{X}_i)^2}{n_i - np}} \tag{31}$$

donde n_i y np son el número de datos del registro y de parámetros de ajuste, en el caso estacionario tres (u, a, k) y en el no estacionario cinco ($\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, k_m$, o bien, $\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1, k_m$); X_i son los datos máximos ordenados de menor a mayor y \hat{X}_i son los valores estimados con $x(F)$ o función de cuantiles (ecuación 10) que utiliza los parámetros de ubicación y escala variables (lineal o exponencialmente), para una probabilidad de no excedencia estimada con la fórmula de Weibull (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n_i + 1} \tag{32}$$

donde m es el número de orden del dato, con 1 para el menor y n_i para el mayor. La evaluación del EEA permite seleccionar entre el modelo lineal y el exponencial para realizar la extrapolación de las predicciones de diseño.

Ajuste de las distribuciones no estacionarias LOG_{11} y PAG_{11}

FDP Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG) son modelos que se utilizan en los AHF (Stedinger *et al.*,

the final time (T_f), in the location and scale parameters (equations 16 to 19), so there will be predictions with linear and exponential extrapolation:

$$F = 1 - \frac{1}{Tr} \tag{29}$$

$$T_f = n_i + (AFP - AFR) \tag{30}$$

where AFP and AFR are the final years of the prediction (2025, 2050 or 2100) and of the record.

Standard error of fit

In the mid-1970s the standard error of fit (EEA) was established as a quantitative statistical indicator of the quality of the fit achieved between data and predictions with the FDP that is tested, since it evaluates the standard deviation of those differences. In this study the FDP that is tested is the non-stationary distribution GVE_{11} and its expression is as follows (Kite, 1977, Pandey and Nguyen, 1999):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_i} (X_i - \hat{X}_i)^2}{n_i - np}} \tag{31}$$

where n_i and np are the number of record data and of parameters of fit, in the stationary case three (u, a, k) and in the non-stationary case five ($\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, k_m$, o bien, $\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1, k_m$); X_i are the maximum data ordered from lower to higher and \hat{X}_i are the estimated values with $x(F)$ or quantile function (equation 10) that uses the variable location and scale parameters (linearly or exponentially), for an estimated probability of non-exceedance with the Weibull formula (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n_i + 1} \tag{32}$$

where m is the order number of the data, with 1 for the lowest and n_i for the highest. The evaluation of the EEA allows us to select between the linear and exponential models to extrapolate the design predictions.

Fitting of non-stationary distributions LOG_{11} and PAG_{11}

FDP Generalized Logistics (LOG) and Generalized Pareto (PAG) are models used in the AHFs (Stedinger *et al.*, 1993; Kim *et al.*, 2015), which can be fitted in their non-stationary versions, with the mobile L-moments method, by changing equations 11 to 14, to estimate their location and scale parameters and then make their predictions with equation 10, which corresponds

1993; Kim *et al.*, 2015), que se pueden ajustar en sus versiones no estacionarias, con el método de los momentos L móviles, al cambiar las ecuaciones 11 a 14, para estimar sus parámetros de ubicación y escala y después realizar sus predicciones con la ecuación 10, que les corresponda. Las fórmulas para las distribuciones estacionarias LOG_0 y PAG_0 las documentó Campos-Aranda (2016). El método de los momentos L móviles puede aplicarse usando los momentos L de orden mayor (Wang, 1997; Campos-Aranda, 2016) y obteniendo el mejor ajuste en los tramos de registro, que definen las ventanas deslizables.

Registros de valores máximos anuales por procesar

Dos registros de la literatura especializada se seleccionaron para ilustrar la aplicación de la distribución no estacionaria GVE_{11} ajustada con el método de los momentos L móviles (Mudersbach y Jensen, 2010 a, b). Los datos son aproximados a los presentados en las gráficas originales (Cuadro 1).

El primer registro, tomado de Vogel *et al.* (2011), incluyó 69 datos de gasto máximo anual (1940 a 2008), en una estación hidrométrica del Río Aberjona, cerca de la ciudad de Boston, Massachusetts, EUA, y cuya cuenca de drenaje ha estado impactada por el desarrollo urbano. Esta serie tuvo comportamiento con tendencia lineal ascendente y variabilidad creciente al final del registro (Figura 1).

El segundo registro, tomado de Katz (2013), es ejemplo de la reducción drástica de la precipitación máxima diaria (*PMD*) de invierno (mayo a octubre) que registró la estación Manjimup del extremo suroeste de Australia. El registro incluyó 75 valores anuales (1930 a 2004), con tendencia descendente y variabilidad mayor en el inicio del registro (Figura 2).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Predicciones de Q en una estación del río Aberjona, EUA

Los datos (Cuadro 1) tuvieron tendencia lineal ascendente y significativa, con estadística de la distribución Student de 3.850 y valor crítico de 1.996 ($p \leq 0.05$). El diagrama de diferencias al cuadrado, entre cada dato y la tendencia lineal calculada, mostró que la variabilidad fue mayor hacia el final del registro (Figura 3).

El modelo lineal con el tiempo t de los parámetros de ajuste u y a , conduce a errores estándar de ajuste (*EEA*) menores en comparación con los del modelo exponencial (Cuadro 2). Con anchura de ventana

to them. The formulas for the stationary distributions LOG_0 and PAG_0 were documented by Campos-Aranda (2016). The mobile L-moments method can be applied using the higher-order L-moments (Wang, 1997, Campos-Aranda, 2016) and obtaining the best fit in the recording sections, which define the sliding windows.

Records of annual maximum values to be processed

Two records of specialized literature were selected to illustrate the application of the non-stationary distribution GVE_{11} fitted with the mobile L-moments method (Mudersbach y Jensen, 2010 a, b). The data are approximate to those shown in the original graphs (Table 1).

The first record, taken from Vogel *et al.* (2011), included 69 maximum annual expenditure data (1940 to 2008), at a hydrometric station of the Aberjona River, near the city of Boston, Massachusetts, USA, and whose drainage basin was impacted by urban development. This series had a behavior with upward linear trend and increasing variability at the end of the record (Figura 1).

The second record, taken from Katz (2013), is an example of the drastic reduction of the maximum daily precipitation (*PMD*) in winter (May to October) recorded by the Manjimup station in the southwestern extreme of Australia. The record included 75 annual values (1930 to 2004), with a downward trend and greater variability at the beginning of the record (Figura 2).

RESULTS AND DISCUSSION

Q Predictions in a station of the Aberjona River, USA

The data (Table 1) had an upward linear and significant trend, with statistics of the Student distribution of 3.850 and a critical value of 1.996 ($p \leq 0.05$). The diagram of squared differences, between each data and the calculated linear trend showed that the variability was greater towards the end of the record (Figura 3).

The linear model with the time t of the fit parameters u and a , leads to lower standard errors of fit (*EEA*) compared to those of the exponential model (Cuadro 2). With a mobile window width of 20 data, the lowest *EEA* was obtained, so these results were adopted to obtain predictions for the future (Figura 4).

Cuadro 1. Datos máximos anuales de gasto (Q , $m^3 \cdot s^{-1}$) y precipitación máxima diaria (PMD , milímetros) en las estaciones indicadas.
Table 1. Maximum annual flow data (Q , $m^3 \cdot s^{-1}$) and maximum daily precipitation (PMD , millimeters) in the indicated stations.

No.	Estación hidrométrica del río Aberjona, EUA				Estación pluviométrica Manjimup, Australia			
	Año	Q	Año	Q	Año	PMD	Año	PMD
1	1940	9.1	1978	18.7	1930	35.7	1968	34.7
2	1941	5.9	1979	39.6	1931	49.0	1969	24.8
3	1942	7.4	1980	7.1	1932	37.8	1970	33.6
4	1943	6.8	1981	9.3	1933	47.1	1971	24.8
5	1944	5.0	1982	24.4	1934	84.0	1972	29.9
6	1945	6.2	1983	12.7	1935	44.9	1973	28.3
7	1946	9.1	1984	22.9	1936	54.1	1974	34.8
8	1947	9.1	1985	8.5	1937	45.9	1975	36.1
9	1948	10.2	1986	14.7	1938	64.8	1976	34.1
10	1949	3.4	1987	24.6	1939	35.1	1977	34.9
11	1950	7.1	1988	8.8	1940	52.3	1978	35.0
12	1951	6.8	1989	8.8	1941	63.9	1979	30.0
13	1952	6.2	1990	19.8	1942	42.5	1980	35.0
14	1953	7.1	1991	13.9	1943	31.4	1981	28.1
15	1954	13.9	1992	6.8	1944	54.6	1982	28.0
16	1955	19.5	1993	13.9	1945	97.5	1983	51.5
17	1956	10.8	1994	15.0	1946	49.6	1984	32.1
18	1957	4.8	1995	5.9	1947	95.9	1985	37.0
19	1958	11.0	1996	9.1	1948	50.0	1986	24.1
20	1959	4.8	1997	34.0	1949	42.9	1987	32.0
21	1960	5.4	1998	31.1	1950	51.8	1988	63.7
22	1961	6.8	1999	13.3	1951	35.6	1989	33.3
23	1962	10.8	2000	11.0	1952	37.2	1990	46.3
24	1963	22.4	2001	45.3	1953	57.0	1991	51.8
25	1964	6.5	2002	6.8	1954	53.9	1992	37.9
26	1965	8.8	2003	8.8	1955	54.8	1993	41.2
27	1966	2.8	2004	28.3	1956	43.5	1994	34.1
28	1967	10.8	2005	6.5	1957	47.0	1995	35.0
29	1968	18.4	2006	36.8	1958	36.7	1996	35.0
30	1969	13.0	2007	15.3	1959	29.2	1997	43.4
31	1970	21.2	2008	8.2	1960	34.3	1998	36.0
32	1971	4.0	–	–	1961	48.2	1999	51.4
33	1972	15.6	–	–	1962	50.7	2000	30.0
34	1973	8.5	–	–	1963	37.6	2001	34.1
35	1974	7.4	–	–	1964	42.7	2002	37.0
36	1975	6.5	–	–	1965	31.9	2003	36.0
37	1976	13.0	–	–	1966	38.8	2004	27.3
38	1977	10.2	–	–	1967	29.4	–	–

móvil de 20 datos se obtuvo el EEA menor, por lo que esos resultados se adoptaron para obtener las predicciones para el futuro (Figura 4).

Con las ecuaciones 11 a 15 se obtuvieron los parámetros de ajuste del modelo estacionario (GVE_0): $u=8.407$, $a=4.481$ y $k=-0.3034$, con un $EEA=1.556 m^3 \cdot s^{-1}$, y con la ecuación 10 las predicciones (Cuadro 3). La distribución no estacionaria GVE_{11} aportó predicciones mayores, en todos los

With the equations 11 to 15, the fit parameters of the stationary model (GVE_0) were obtained: $u=8.407$, $a=4.481$ and $k=-0.3034$, with an $EEA=1.556 m^3 \cdot s^{-1}$, and with equation 10 the predictions (Table 3). The non-stationary distribution GVE_{11} provided higher predictions in all return periods and even at the end of the historical record (Table 3). In the extreme periods of return (500 and 1000 years) and towards the year 2100, the predictions of

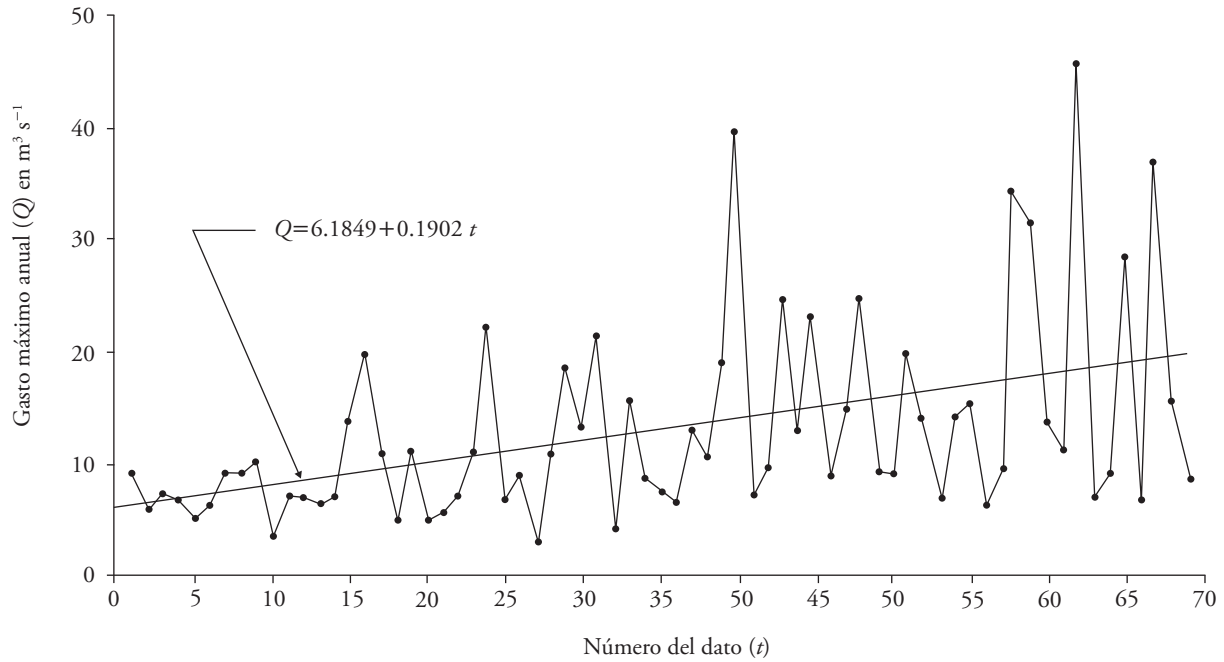


Figura 1. Tendencia lineal (ascendente) de la serie cronológica de gastos máximos anuales (Q) en la estación hidrométrica del Río Aberjona, EUA.

Figure 1. Linear trend l (upward) of the chronological series of the annual maximum flows (Q) in the hydrometric station of the River Aberjona, USA.

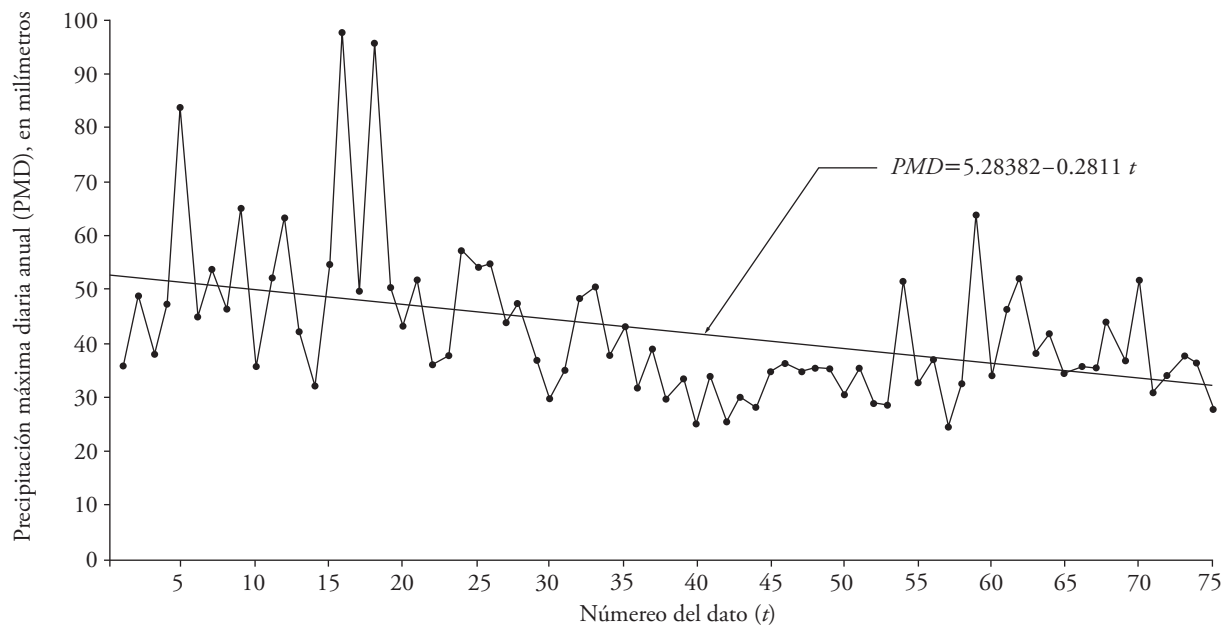


Figura 2. Tendencia lineal (descendente) de la serie cronológica de precipitaciones máxima diarias (PMD) anuales en la estación pluviométrica Manjimup, Australia.

Figure 2. Linear trend (downward) of the chronological series of maximum annual daily precipitations (PMD) in the pluviometric station Manjimup, Australia.

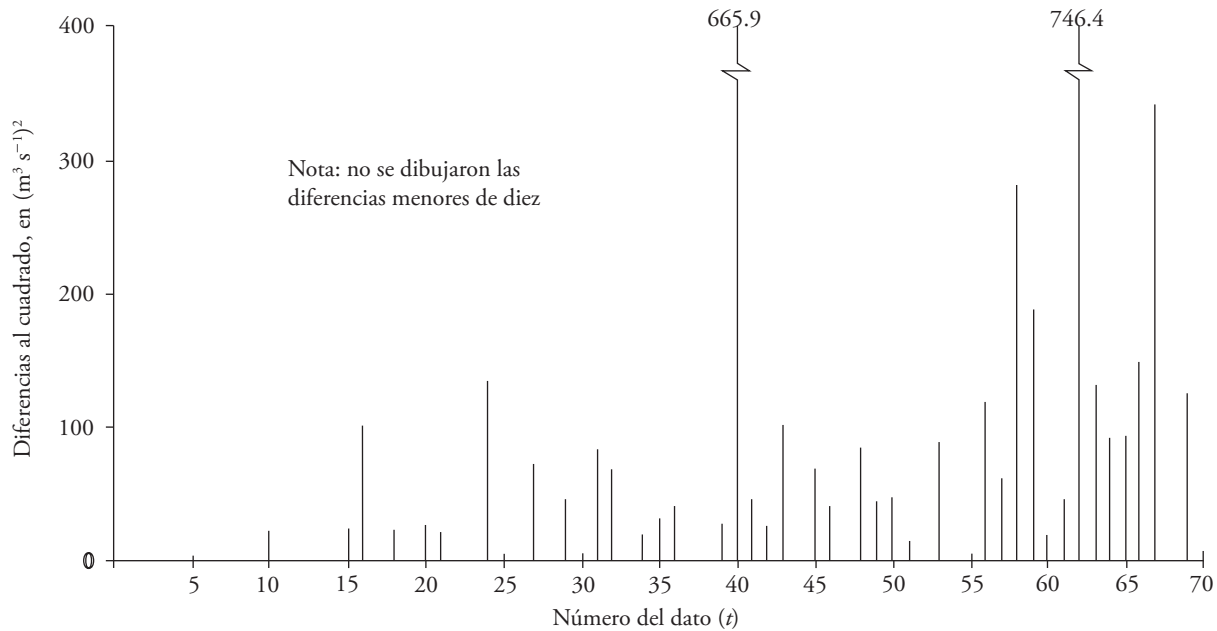


Figura 3. Diferencias (gasto máximo anual menos la tendencia lineal ascendente) al cuadrado del registro de la estación hidrométrica del Río Aberjona, EUA.

Figure 3. Differences (maximum annual flows minus the upward linear trend) to the square of the record of the hydrometric station of the Aberjona River, USA.

Cuadro 2. Ajuste no estacionario con momentos L móviles de la distribución GVE₁₁ con tamaño de la ventana de 10, 15, 20 y 25 datos de gasto máximo anual del río Aberjona, EUA.

Table 2. Non-stationary fit with mobile L-moments of the GVE₁₁ distribution with window size of 10, 15, 20 and 25 maximum annual flow data of the Aberjona River, USA.

Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 10 datos						
<i>nv</i> =59	<i>u_m</i> =9.166	<i>a_m</i> =5.005	<i>k_m</i> =-0.109			
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>			
$\alpha_0=4.380$	$\alpha_1=0.120$	<i>ECM</i> =1.104	$\gamma_0=5.226$	$\gamma_1=0.01325$	<i>ECM</i> =1.116	
$\beta_0=0.957$	$\beta_1=0.101$	<i>ECM</i> =1.344	$\delta_0=1.962$	$\delta_1=0.02112$	<i>ECM</i> =1.322	
<i>EEA</i> =2.876 m ³ ·s ⁻¹			<i>EEA</i> = 3.103 m ³ ·s ⁻¹			
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 15 datos						
<i>nv</i> =54	<i>u_m</i> =8.990	<i>a_m</i> =4.760	<i>k_m</i> =-0.175			
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>			
$\alpha_0=4.209$	$\alpha_1=0.112$	<i>ECM</i> =0.620	$\gamma_0=5.083$	$\gamma_1=0.01290$	<i>ECM</i> =0.683	
$\beta_0=1.305$	$\beta_1=0.081$	<i>ECM</i> =0.658	$\delta_0=2.001$	$\delta_1=0.01915$	<i>ECM</i> =0.740	
<i>EEA</i> =2.330 m ³ ·s ⁻¹			<i>EEA</i> =2.873 m ³ ·s ⁻¹			
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 20 datos						
<i>nv</i> =49	<i>u_m</i> =9.039	<i>a_m</i> =4.745	<i>k_m</i> =-0.181			
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>			
$\alpha_0=3.548$	$\alpha_1=0.122$	<i>ECM</i> =0.504	$\gamma_0=4.720$	$\gamma_1=0.01398$	<i>ECM</i> =0.584	
$\beta_0=1.298$	$\beta_1=0.077$	<i>ECM</i> =0.581	$\delta_0=1.995$	$\delta_1=0.01835$	<i>ECM</i> =0.672	
<i>EEA</i> =2.136 m ³ ·s ⁻¹			<i>EEA</i> =2.473 m ³ ·s ⁻¹			
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 25 datos						
<i>nv</i> =44	<i>u_m</i> =9.093	<i>a_m</i> =4.824	<i>k_m</i> =-0.176			
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>			
$\alpha_0=2.892$	$\alpha_1=0.131$	<i>ECM</i> =0.394	$\gamma_0=4.435$	$\gamma_1=0.01473$	<i>ECM</i> =0.448	
$\beta_0=1.078$	$\beta_1=0.079$	<i>ECM</i> =0.486	$\delta_0=1.984$	$\delta_1=0.01804$	<i>ECM</i> =0.551	
<i>EEA</i> =2.171 m ³ ·s ⁻¹			<i>EEA</i> =2.241 m ³ ·s ⁻¹			

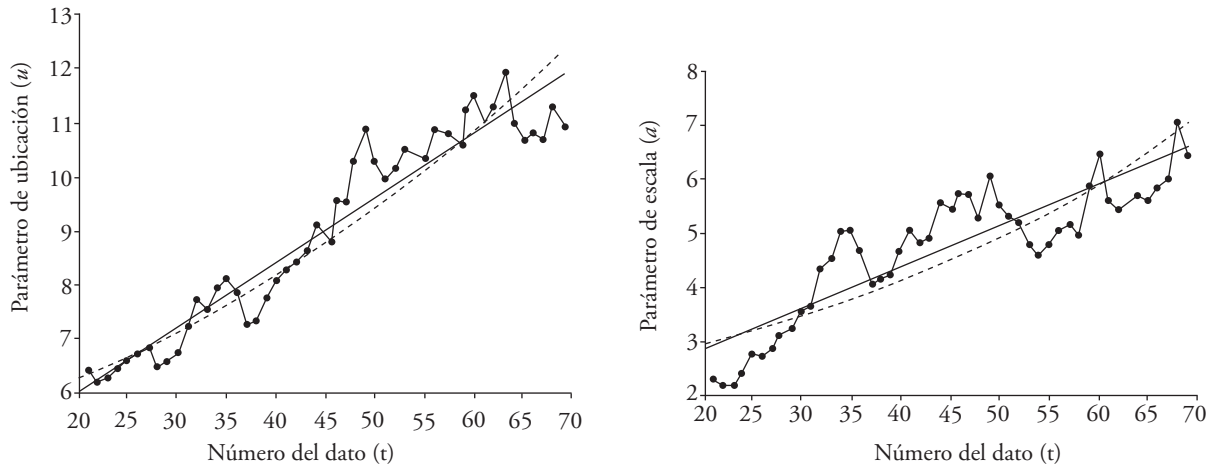


Figura 4. Tendencia lineal (recta) y exponencial (curva) de los parámetros de ubicación (u) y escala (a) estimados con momentos L con 20 datos en el ancho de la ventana móvil de los gastos máximos anuales del Río Aberjona, EUA.
Figure 4. Linear (straight) and exponential (curve) trend of the location (u) and scale (a) parameters estimated with L-moments with 20 data in the width of the mobile window of the annual maximum flows of the Aberjona River, USA.

periodos de retorno e incluso al término del registro histórico (Cuadro 3). En los periodos de retorno extremos (500 y 1000 años) y hacia el año 2100 las predicciones del modelo no estacionario fueron el doble de las del modelo estacionario que no tomó en cuenta la tendencia ascendente, ni la variabilidad mayor hacia el final del registro.

Predicciones de PMD en la estación Manjimup de Australia

Los datos de precipitación máxima diaria (PMD) anual (Cuadro 1) tienen tendencia lineal descendente (Figura 2) y significativa, con estadística de la distribución Student de -4.085 y valor crítico de 1.993 con $p \leq 0.05$. En el diagrama de diferencias al cuadrado, entre cada dato y la tendencia lineal, la variabilidad

the non-stationary model were twice those of the stationary model that did not consider the upward trend or the greater variability towards the end of the record.

PMD predictions in the Manjimup station of Australia

The annual daily maximum precipitation data (PMD) (Table 1) have a significant linear downward trend (Figure 2), with statistics of the Student distribution of -4.085 and critical value of 1.993 with $p \leq 0.05$. In the diagram of squared differences, between each data and linear trend, the variability was noticeably higher at the beginning of the record (Figure 5).

Cuadro 3. Predicciones de gasto máximo anual ($m^3 \cdot s^{-1}$) obtenidas con las distribuciones GVE_0 y GVE_{11} con parámetros u y a variando linealmente y ancho de la ventana móvil de 20 datos, en el río Aberjona, EUA.
Table 3. Predictions of maximum annual flow ($m^3 \cdot s^{-1}$) obtained with the distributions GVE_0 and GVE_{11} with parameters u and a varying linearly and width of the mobile window of 20 data, in the Aberjona River, USA.

Distribuciones GVE_0 y GVE_{11}	Periodos de retorno en años							
	2	5	10	25	50	100	500	1000
Estacionario	10.1	16.9	22.9	32.6	41.9	53.3	90.9	113.7
En el año 2008	14.5	23.3	30.2	40.5	49.3	59.2	87.4	102.4
En el año 2025	17.0	27.6	35.9	48.2	58.7	70.6	104.5	122.3
En el año 2050	20.8	34.0	44.3	59.5	72.6	87.3	129.5	151.7
En el año 2100	28.4	46.7	61.0	82.2	100.4	120.9	179.5	210.4

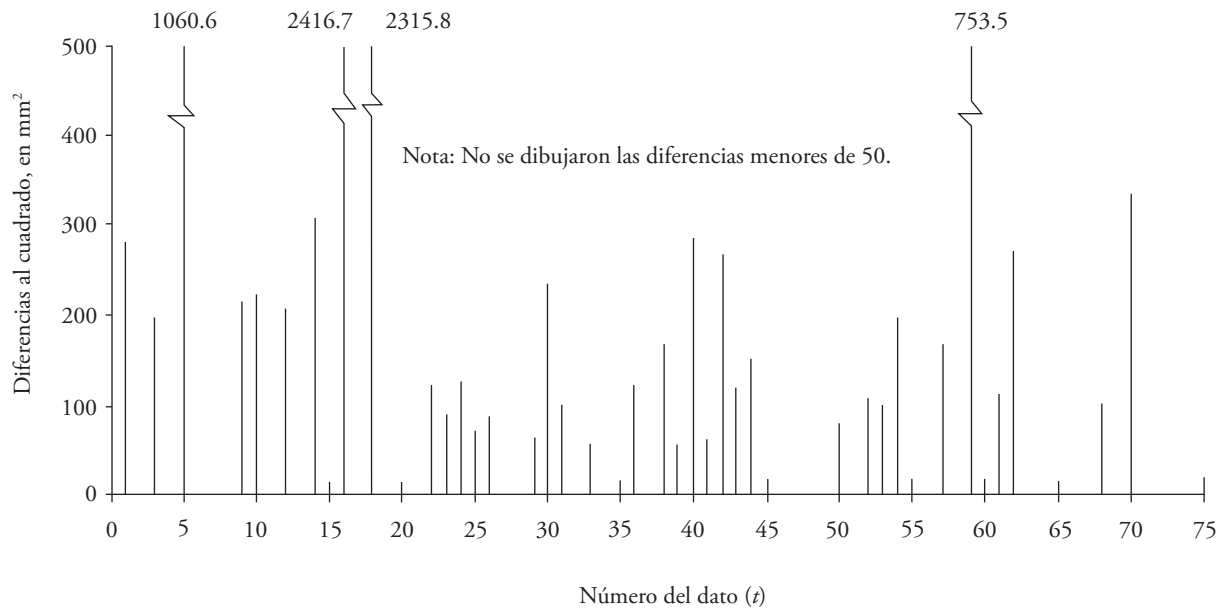


Figura 5. Diferencias (precipitación máxima diaria anual menos la tendencia lineal descendente) al cuadrado del registro de la estación pluviométrica Manjimup, Australia.

Figure 5. Differences (annual maximum daily precipitation minus the downward linear trend) to the square of the record of the pluviometric station Manjimup, Australia.

fue notablemente mayor al inicio del registro (Figura 5).

El modelo exponencial con el tiempo t de los parámetros de ajuste u y a , conduce a errores estándar de ajuste (EEA) menores comparados con los del modelo lineal (Cuadro 4). Conforme crece el tamaño de la ventana móvil se obtienen menores EEA , por lo cual se adoptan los del valor máximo probado de $n=30$ (Figura 6).

Con base en las ecuaciones 11 a 15 se obtuvieron los parámetros de ajuste del modelo GVE_0 estacionario: $u=35.488$, $a=8.431$ y $k=-0.1846$, con un $EEA=2.881$ mm. Las predicciones respectivas, obtenidas con la ecuación 10, mostraron que la distribución no estacionaria GVE_{11} aportó predicciones menores, desde el final del registro histórico y en todos los periodos de retorno analizados (Cuadro 5). En los periodos de retorno extremos analizados (500 y 1000 años) y hacia el año 2100 las predicciones de PMD tendieron a estabilizarse alrededor de los 21 mm.

Aplicabilidad del método de los momentos L móviles

La representación lineal de ambos parámetros y sensiblemente mejor del parámetro de ubicación (u)

The exponential model with the time t of the fit parameters u and a , leads to lower standard errors of fit (EEA) compared with those of the linear model (Cuadro 4). As the size of the mobile window grows, lower $EEAs$ are obtained, whereby those of the maximum proven value of $n=30$ are adopted (Figura 6).

Based on equations 11 to 15, the fit parameters of the stationary model GVE_0 were obtained: $u=35.488$, $a=8.431$ y $k=-0.1846$, with an $EEA = 2.881$ mm. The respective predictions, obtained with equation 10, showed that the non-stationary distribution GVE_{11} contributed lower predictions, from the end of the historical record and in all the return periods analyzed (Cuadro 5). In the extreme return periods analyzed (500 and 1000 years) and towards the year 2100, predictions of PMD tended to stabilize around 21 mm.

Applicability of the mobile L-moments method

The linear representation of both parameters and significantly better of the location parameter (u) is acceptable for the Aberjona River, USA (Figure 4). At the Manjimup station, Australia (Figure 6) the

Cuadro 4. Ajuste no estacionario con momentos L móviles de la distribución GVE₁₁ con tamaño de la ventana de 15, 20, 25 y 30 datos de PMD anual de la estación Manjimup, Australia.

Table 4. Non-stationary fitting with mobile L-moments of the GVE₁₁ distribution with window size of 15, 20, 25 and 30 annual PMD data from the Manjimup station, Australia.

Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 15 datos					
<i>nv</i> =60	<i>u_m</i> =36.930	<i>a_m</i> =8.050	<i>k_m</i> =-0.009		
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>		
$\alpha_0=48.982$	$\alpha_1=-0.265$	<i>ECM</i> =3.410	$\gamma_0=49.3973$	$\gamma_1=-0.00690$	<i>ECM</i> =3.253
$\beta_0=14.124$	$\beta_1=-0.134$	<i>ECM</i> =1.670	$\delta_0=15.684$	$\delta_1=-0.01606$	<i>ECM</i> =1.536
<i>EEA</i> =12.804 mm			<i>EEA</i> =12.176 mm		
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 20 datos					
<i>nv</i> =55	<i>u_m</i> =36.292	<i>a_m</i> =7.828	<i>k_m</i> =-0.072		
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>		
$\alpha_0=49.933$	$\alpha_1=-0.284$	<i>ECM</i> =2.949	$\gamma_0=51.545$	$\gamma_1=-0.00753$	<i>ECM</i> =2.773
$\beta_0=14.137$	$\beta_1=-0.131$	<i>ECM</i> =1.378	$\delta_0=16.183$	$\delta_1=-0.01620$	<i>ECM</i> =1.255
<i>EEA</i> =12.472 mm			<i>EEA</i> =11.898 mm		
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 25 datos					
<i>nv</i> =50	<i>u_m</i> =35.733	<i>a_m</i> =7.647	<i>k_m</i> =-0.105		
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>		
$\alpha_0=50.660$	$\alpha_1=-0.296$	<i>ECM</i> =2.528	$\gamma_0=52.906$	$\gamma_1=-0.00795$	<i>ECM</i> =2.351
$\beta_0=14.867$	$\beta_1=-0.143$	<i>ECM</i> =1.023	$\delta_0=18.459$	$\delta_1=-0.01835$	<i>ECM</i> =0.923
<i>EEA</i> =12.427 mm			<i>EEA</i> =11.826 mm		
Ajuste no estacionario (GVE ₁₁) con ancho de ventana móvil (<i>n</i>) de 30 datos					
<i>nv</i> =45	<i>u_m</i> =35.275	<i>a_m</i> =7.666	<i>k_m</i> =-0.120		
Modelo lineal con <i>t</i>			Modelo exponencial con <i>t</i>		
$\alpha_0=50.327$	$\alpha_1=-0.284$	<i>ECM</i> =1.904	$\gamma_0=52.923$	$\gamma_1=-0.00778$	<i>ECM</i> =1.761
$\beta_0=15.864$	$\beta_1=-0.155$	<i>ECM</i> =0.800	$\delta_0=21.281$	$\delta_1=-0.02000$	<i>ECM</i> =0.731
<i>EEA</i> =11.777 mm			<i>EEA</i> =11.199 mm		

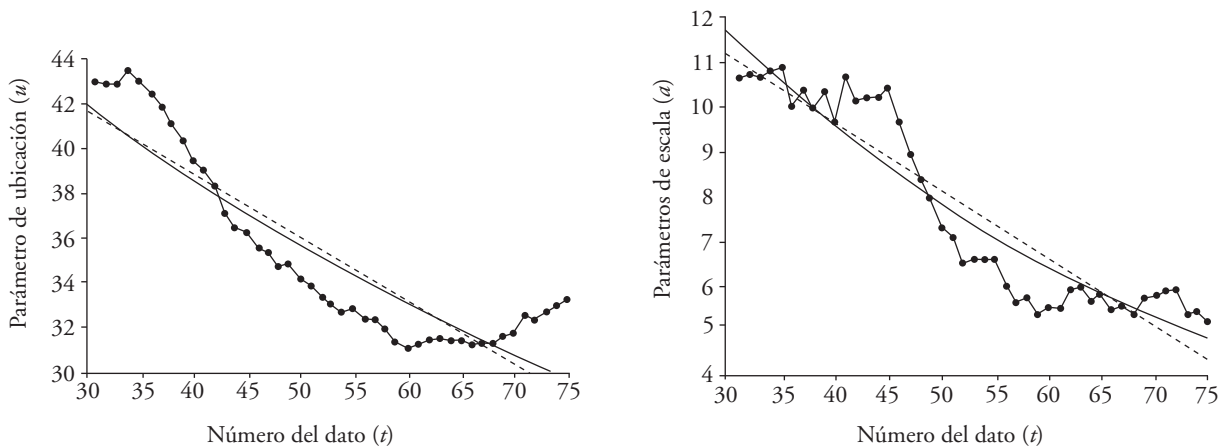


Figura 6. Tendencia lineal (recta) y exponencial (curva) de los parámetros de ubicación (*u*) y escala (*a*) estimados con momentos L con 30 datos en el ancho de la ventana móvil en la PMD anual de la estación Manjimup, Australia.

Figure 6. Linear (straight) and exponential (curve) trend of the location (*u*) and scale (*a*) parameters estimated with L-moments with 30 data in the width of the mobile window in the annual PMD of the Manjimup station, Australia.

Cuadro 5. Predicciones de *PMD* obtenidas con las distribuciones GVE estacionaria y no estacionaria (GVE_{11}) con parámetros variando exponencialmente y ancho de la ventana móvil (n) de 30 datos, en la estación Manjimup, Australia.
Table 5. Predictions of *PMD* obtained with the stationary GVE and non-stationary (GVE_{11}) distributions with parameters varying exponentially and width of the mobile window (n) of 30 data, at the Manjimup station, Australia.

Distribuciones GVE_0 y GVE_{11}	Periodos de retorno en años							
	2	5	10	25	50	100	500	1000
Estacionario	38.7	50.1	59.0	72.2	83.7	96.6	133.6	153.3
En el año 2004	31.3	37.3	41.8	48.0	53.1	58.7	73.3	80.6
En el año 2025	26.3	30.2	33.1	37.3	40.6	44.2	53.9	58.6
En el año 2050	21.4	23.8	25.5	28.0	30.1	32.3	38.1	41.0
En el año 2100	14.3	15.1	15.8	16.7	17.5	18.3	20.4	21.5

es aceptable para el río Aberjona, EUA (Figura 4). En la estación Manjimup, Australia (Figura 6) la representación del parámetro de escala (a) puede ser aceptable, pero la relativa al de ubicación u no.

La calidad estadística mayor del ajuste con el método de los momentos L móviles se destaca numéricamente por la similitud que muestran los errores estándar de ajuste (EEA) de los modelos estacionario (GVE_0) y no estacionario (GVE_{11}). En el caso del río Aberjona, EUA, los EEA de la GVE estacionaria y no estacionaria fueron 1.556 y 2.136 $m^3 \cdot s^{-1}$; es decir, con orden de magnitud similar. En cambio, en la estación Manjimup, Australia, los EEA de ambos modelos (2.881 y 11.199 mm) fueron diferentes y bastante mayor el de la distribución GVE_{11} , por lo cual, no es aceptable al grupo de datos de *PMD*.

CONCLUSIONES

El método de los momentos L móviles (MLM) propuesto por Cunderlik y Burn (2003) y aplicado Mudersbach y Jensen (2010 a, b), para el ajuste de la distribución GVE_{11} , con parámetros de ubicación y escala variables, lineales o exponenciales con la covariable tiempo, es un procedimiento práctico, recomendado para el análisis hidrológico de frecuencias de datos máximos anuales que presentan tendencia y variabilidad cambiante través de su registro, que debe ser amplio.

El uso de diferentes tamaños de la ventana móvil se sugiere en el procedimiento operativo del método de los MLM, para ajustar de acuerdo a cada uno la distribución GVE_{11} , seleccionando la más conveniente al registro procesado a través del menor error estándar de ajuste.

La conveniencia estadística o bondad de ajuste del método de los MLM al registro no estacionario

scale parameter representation (a) may be acceptable, but the one relative to the location parameter u may be not acceptable.

The higher statistical quality of the fit with the mobile L-moments method is numerically highlighted because of the similarity shown by the standard errors of fit (EEA) of the stationary (GVE_0) and non-stationary (GVE_{11}) models. In the case of the Aberjona River, USA, the EEA of the stationary and non-stationary GVE were 1.556 and 2.136 $m^3 \cdot s^{-1}$, that is, with an order of similar magnitude. In contrast, at the Manjimup station, Australia, the EEA of both models (2.881 and 11.199 mm) were different and much greater that of the GVE_{11} distribution, therefore, is not acceptable to the *PMD* data group.

CONCLUSIONS

The method of the mobile L-moments (MLM) proposed by Cunderlik and Burn (2003) and applied by Mudersbach and Jensen (2010 a, b), for the fit of the GVE_{11} distribution, with variable location and scale parameters, linear or exponential with the covariate time, is a practical procedure, recommended for the hydrological analysis of annual maximum data frequencies that present changing trends and variability through their record, which must be large. The use of different sizes of the mobile window is suggested in the operating procedure of the MLM method, to fit according to each one the GVE_{11} distribution, selecting the most convenient to the record processed through the lowest standard error of fit.

The statistical convenience or goodness of fit of the MLM method to the processed non-stationary record is judged through the linear or exponential

procesado, se juzga mediante la representatividad lineal o exponencial de las series cronológicas de los parámetros de ubicación, escala calculados y similitud numérica que tenga el error estándar de ajuste de las distribuciones GVE_0 y GVE_{11} .

Con dos aplicaciones numéricas se demuestra la sencillez del método de los MLM y con base en las predicciones, se destaca su importancia y utilidad, en los análisis probabilísticos de registros amplios de datos hidrológicos extremos que exhiben tendencia y variabilidad no constante.

LITERATURA CITADA

- Aissaoui-Fqayeh, I., S. El Adlouni, T. B. M. J. Ouarda, and A. St-Hilaire. 2009. Développement du modèle log-normal non-stationnaire et comparaison avec le modèle GEV non-stationnaire. *Hydrol. Sci. J.* 54: 1141–1156.
- Al Saji, M., J. J. O'Sullivan, and A. O'Connor. 2015. Design impact and significance of non-stationary of variance in extreme rainfall. *Proc. IAHS*, No. 371, pp: 117–123.
- Álvarez-Olguín, G., y C. A. Escalante-Sandoval. 2016. Análisis de frecuencias no estacionario de series de lluvia anual. *Tecnol. Cienc. Agua VII*: 71–88.
- Asquith, W. H. 2011. Probability-weighted moments. *In: Distributional Analysis with L-moment Statistics using the R Environment for Statistical Computing*. Author edition (ISBN-13: 978-1463508418). Texas, U.S.A. pp: 77–86.
- Benson, M. A. 1962. Plotting positions and economics of engineering planning. *J. Hydraulics Div.* 88: 57–71.
- Campos-Aranda, D. F. 2015. Búsqueda del cambio climático en la temperatura máxima de mayo en 16 estaciones climatológicas del estado de Zacatecas, México. *Tecnol. Cienc. Agua VI*: 143–160.
- Campos-Aranda, D. F. 2016. Ajuste de las distribuciones GVE, LOG y PAG con momentos L de orden mayor. *Ing. Invest. Tecnol. XVII*: 131–142.
- Cunderlik, J. M. and D. H. Burn. 2003. Non-stationary pooled flood frequency analysis. *J. Hydrol.* 276: 210–223.
- Davis, P. J. 1972. Gamma Function and related functions. *In: Abramowitz M. and I. Stegun (eds). Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York, U.S.A. Ninth printing. pp: 253–296.
- El Adlouni, S., T. B. M. J. Ouarda, X. Zhang, R. Roy, and B. Bobée. 2007. Generalized maximum likelihood estimators for the nonstationary generalized extreme value model. *Water Resour. Res.* 43: 1–13 (W03410).
- El Adlouni, S., B. Bobée, and T. B. M. J. Ouarda. 2008. On the tails of extreme event distributions in hydrology. *J. Hydrol.* 355: 16–33.
- Franks, S. W., C. J. White and M. Gensen. 2015. Estimating extreme flood events—assumptions, uncertainty and error. *Proc. IAHS*, No. 369, pp: 31–36.
- Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas, and J. R. Wallis. 1979. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resour. Res.* 15: 1049–1054.
- representativeness of the chronological series of the location, scale parameters calculated as well as the numerical similarity that has the standard error of fit of the GVE_0 and GVE_{11} distributions. With two numerical applications the simplicity of the MLM method is demonstrated and, based on the predictions, its importance and usefulness are highlighted, in the probabilistic analyses of large records of extreme hydrological data that exhibit non-constant tendency and variability.

—End of the English version—



Hosking, J. R. M. 1990. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 52: 105–124.

Hosking, J. R. M., and J. R. Wallis. 1997. *Regional Frequency Analysis. An Approach based on L-moments*. Cambridge University Press. Cambridge, England. 224 p.

Jakob, D. 2013. Nonstationarity in extremes and engineering design. *In: AghaKouchak, A., D. Easterling, K. Hsu, S. Schubert, and S. Sorooshian (eds). Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. pp: 393–417.

Katz, R. W. 2013. Statistical methods for nonstationary extremes. *In: AghaKouchak, A., D. Easterling, K. Hsu, S. Schubert and S. Sorooshian (eds). Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. pp: 15–37.

Khalik, M. N., T. B. M. J. Ouarda, J. C. Ondo, P. Gachon, and B. Bobée. 2006. Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *J. Hydrol.* 329: 534–552.

Kim, S., W. Nam, H. Ahn, T. Kim, and J. H. Heo. 2015. Comparison of nonstationary generalized logistic models based on Monte Carlo simulation. *Proc. IAHS*, No. 371, pp: 65–68.

Kite, G. W. 1977. Comparison of frequency distributions. *In: Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. pp: 156–168.

Meylan, P., A. C. Fabre, and A. Musy. 2012. *Predictive Hydrology. A Frequency Analysis Approach*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. 212 p.

Mudersbach, C., and J. Jensen. 2010a. Nonstationary extreme value analysis of annual maximum water levels for designing coastal structures on the German North Sea coastline. *J. Flood Risk Manag.* 3: 52–62.

Mudersbach, C., and J. Jensen. 2010b. An advanced statistical extreme value model for evaluating storm surge heights considering systematic records and sea level scenarios. *In: Proc. 32nd Conference on Coastal Engineering*. Shanghai, China. pp: currents 23.

Pandey, G. R., and V. T. V. Nguyen. 1999. A comparative study of regression based methods in regional flood frequency analysis. *J. Hydrol.* 225: 92–101.

- Park, J. S., H. S. Kang, Y. S. Lee, and M. K. Kim. 2011. Changes in the extreme daily rainfall in South Korea. *Int. J. Climatol.* 31: 2290–2299.
- Rao, A. R. and K. H. Hamed. 2000. *Flood Frequency Analysis*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. 350 p.
- Stedinger, J. R., R. M. Vogel, and E. Foufoula–Georgiou. 1993. Frequency analysis of extreme events. *In*: Maidment, D. R. (ed). *Handbook of Hydrology*. McGraw–Hill, Inc. New York, U.S.A. pp: 18.1–18.66.
- Vogel, R. M., C. Yaindl, and M. Walter. 2011. Nonstationarity: Flood magnification and recurrence reduction factors in the United States. *J. Am. Water Resour. Assoc.* 47: 464–474.
- Wang, Q. J. 1997. LH moments for statistical analysis of extreme events. *Water Resour. Res.* 33: 2841–2848.