

# AJUSTE CON MOMENTOS L DE LAS DISTRIBUCIONES GVE, LOG Y PAG NO ESTACIONARIAS EN SU PARÁMETRO DE UBICACIÓN, APLICADO A DATOS HIDROLÓGICOS EXTREMOS

## FITTING WITH L MOMENTS OF THE GVE, LOG AND PAG DISTRIBUTIONS NON-STATIONARY IN THEIR LOCATION PARAMETER, APPLIED TO EXTREME HYDROLOGICAL DATA

Daniel F. Campos-Aranda

Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Genaro Codina Núm. 240. 78280. San Luis Potosí, San Luis Potosí (campos\_aranda@hotmail.com).

### RESUMEN

El análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos, como crecientes, sequías, vientos y precipitación máxima diaria, se basa en aceptar que los datos máximos anuales de la muestra disponible son independientes y provienen de un proceso aleatorio estacionario. Esto significa que sus propiedades estadísticas no varían en el tiempo. Debido a cambios en el uso del suelo e impactos del calentamiento global, las series de datos hidrológicos presentan tendencias, lo que indica que no son estacionarias. El objetivo de este estudio fue exponer la generalización del método de los momentos L, para estimar los parámetros de ajuste de las funciones de distribución de probabilidades: General de Valores Extremos (GVE), Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG) de tipo no estacionario, al variar con el tiempo ( $t$ ) su parámetro de ubicación ( $u$ ) de forma lineal y cuadrática. Los modelos probabilísticos  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  y  $PAG_1$  tienen cuatro parámetros de ajuste ( $\delta_1, \delta_2, a, k$ ), ya que  $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$  y sus parámetros de escala ( $a$ ) y forma ( $k$ ) son constantes. Los modelos  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  y  $PAG_2$  tienen cinco parámetros de ajuste ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3, a, k$ ), debido a que  $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2$ . En series con tendencia se emplea como covariable  $t$  en años, pero también se pueden emplear indicadores de la variabilidad climática regional o global, como el índice de la oscilación del sur. Por medio de las cuatro aplicaciones numéricas que se describen, se demostró la sencillez del procedimiento operativo y la utilidad del uso de los modelos GVE, LOG y PAG no estacionarios se destacó a través de sus predicciones en series con tendencia, o usando una covariable climática.

### ABSTRACT

The analysis of frequencies of extreme hydrological data such as floods, droughts, winds and maximum daily precipitation, is based on accepting that the maximum annual data of the available sample are independent and come from a random process that is stationary. This means that their statistical properties do not vary with time. Due to changes in land use and impacts of global warming, the hydrological data series show trends, indicating that they are non-stationary. The objective of this study was to expose the generalization of the L moments method, to estimate the fit parameters of the probability distribution functions: General Extreme Values (GVE), Generalized Logistics (LOG) and Generalized Pareto (PAG) of non-stationary type, by varying with time ( $t$ ) its location parameter ( $u$ ) in a linear and quadratic way. The probabilistic models  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  and  $PAG_1$  have four fitting parameters ( $\delta_1, \delta_2, a, k$ ), since  $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$  and their scale ( $a$ ) and form ( $k$ ) parameters are constant. The models  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  and  $PAG_2$  have five fitting parameters ( $\delta_1, \delta_2, \delta_3, a, k$ ), due to the fact that  $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2$ . In series with trend it is used as a covariate  $t$  in years, but indicators of regional or global climate variability can also be used, such as the southern oscillation index. By means of the four numerical applications that are described, the simplicity of the operating procedure was demonstrated and the utility of the use of non-stationary GVE, LOG and PAG models is highlighted through their predictions in series with trend, or using a climatic covariate.

**Key words:** L-moments, non-stationary probability distribution, linear regression, quadratic regression, standard error of fit, southern oscillation index.

---

\* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: diciembre, 2016. Aprobado: julio, 2017.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 52: 169-189. 2018.

**Palabras clave:** momentos L, distribuciones de probabilidad no estacionarias, regresión lineal, regresión cuadrática, error estándar de ajuste, índice de la oscilación del sur.

## INTRODUCCIÓN

Todas las obras hidráulicas de aprovechamiento o control, como embalses, diques de protección, encauzamientos y rectificaciones, puentes y drenaje pluvial urbano, requieren en las etapas de planeación, diseño y operación de la estimación, lo más exacta posible, de las crecientes de diseño. Con base en estas estimaciones hidrológicas, se dimensionan las obras hidráulicas y se intenta garantizar su seguridad; por ello, las crecientes de diseño son predicciones asociadas a probabilidades bajas de excedencia, que se obtienen a través del Análisis de Frecuencias de Crecientes (AFC). Otra etapa, en la que se requiere revisar la seguridad hidrológica de las obras hidráulicas, es cuando ocurre alguna de las dos eventualidades siguientes: 1) se llegó al final de su vida útil y por ello existe más información para realizar el AFC o 2) han ocurrido cambios en su cuenca, como uso del suelo, construcción de otras obras hidráulicas o los originados por el cambio climático (Jakob, 2013).

El AFC es una técnica estadística de inferencia, que utiliza un modelo probabilístico o función de distribución de probabilidades (FDP), para representar a la muestra disponible de gastos máximos anuales instantáneos. Este procedimiento engloba las siguientes etapas (Rao y Hamed, 2000; Meylan *et al.*, 2012): 1) recopilación de los datos y verificación de su calidad estadística, 2) selección de una FDP; 3) elección de un método de estimación de sus parámetros de ajuste, 4) cuantificación objetiva del ajuste logrado con cada FDP y técnica de estimación y 5) selección de resultados.

El AFC se basa en la suposición de estacionariedad; es decir, un clima que no cambia con el tiempo en el sentido estadístico y, por ello, se acepta que los registros disponibles de gasto máximo anual sean independientes y estén idénticamente distribuidos, condición designada "iid". Sin embargo, en años recientes se ha aceptado el cambio climático global originado por el aumento del efecto de los gases de efecto invernadero. Estas dos consideraciones físicas han intensificado el ciclo hidrológico, con incrementos en la frecuencia e intensidad de los eventos extremos

## INTRODUCTION

All the hydraulic works of use or control, such as reservoirs, protection dams, canalizations and rectifications, bridges and urban pluvial drainage, require in the stages of planning, design and operation of the estimate, as accurate as possible, of the design floods. Based on these hydrological estimates, hydraulic works are sized and an attempt is made to guarantee their safety; therefore, the design floods are predictions associated with low probabilities of exceedance, which are obtained through the Flood Frequency Analysis (AFC). There is another stage in which it is necessary to review the hydrological safety of hydraulic works, when one of the following two eventualities occurs: 1) it reached the end of its useful life and therefore there is more information to carry out the AFC; or, 2) changes have occurred in its basin, be these land use, construction of other hydraulic works or those caused by climate change (Jakob, 2013).

The AFC is a statistical technique of inference, which uses a probabilistic model or distribution function of probabilities (FDP), to represent the available sample of instantaneous annual maximum flows. This procedure encompasses the following five stages (Rao and Hamed, 2000; Meylan *et al.*, 2012): 1) data collection and verification of their statistical quality, 2) selection of a FDP; 3) choice of a method for estimating its fit parameters, 4) objective quantification of the fit achieved with each FDP and estimation technique, and 5) selection of results.

The AFC is based on the assumption of stationarity, that is, of a climate that does not change with time in the statistical sense and for that reason, it is accepted that the available records of annual maximum flow are independent and are identically distributed, condition designated "iid." However, in recent years the global climate change caused by the increase in the effect of greenhouse gases has been accepted. These two physical considerations have generated an intensification of the hydrological cycle, with increases in frequency and intensity of extreme precipitation events and consequently, in the possibility of more severe floods (Katz, 2013; Kim *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval, 2016).

The extension of the statistical theory of extreme values to the case of non-stationary hydrological

de precipitación y la posibilidad de crecientes más severas (Katz, 2013; Kim *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval, 2016).

La extensión de la teoría estadística de valores extremos a registros hidrológicos no estacionarios ha seguido los enfoques descritos por Khaliq *et al.* (2006). Uno de esto, quizás el más simple, aplica la FDP clásica de esta teoría, la distribución General de Valores Extremos (GVE) con tres parámetros ( $u$ ,  $a$ ,  $k$ ) y permite el ajuste o traslado gradual, al introducir el tiempo  $t$  como una covariable en su parámetro de ubicación  $u$ , conservando constantes el de escala  $a$  y el de forma  $k$  (Park *et al.*, 2011; Katz, 2013).

La nomenclatura para estas FDP no estacionarias se ha establecido. El Adlouni *et al.* (2007) y Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2011) definieron la función GVE estacionaria como  $GVE_0$ , esta tiene su parámetro de ubicación variable linealmente con el tiempo ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$ ) como  $GVE_1$  y  $GVE_2$  cuando la variación es cuadrática ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2$ ). En el modelo  $GVE_{11}$  los parámetros de ubicación y de escala varían linealmente con el tiempo. En estos modelos algún indicador de la variabilidad climática global o regional se ha utilizado como covariable (López de la Cruz y Francés, 2014; Franks *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval, 2016), es el caso del índice de la oscilación del sur (SOI). El SOI se cuantifica como la diferencia de la presión del aire en superficie entre Darwin, Australia y Tahití en la Polinesia Francesa (Teegavarapu, 2012).

El objetivo de este estudio fue exponer la generalización del método de los momentos L para estimar los parámetros de ajuste de las FDP no estacionarias  $GVE_1$  y  $GVE_2$ . El Adlouni y Ouarda (2008b) propusieron el modelo, lo aplicaron y contrastaron con el tiempo  $t$  y SOI como covariables. El procedimiento se amplió a las FDP Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG), que son modelos que se usan en el análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos (Kim *et al.*, 2015). Cuatro aplicaciones numéricas se describen con datos de la literatura especializada y se enfatiza la utilidad del método de los momentos L para ajustar seis FDP no estacionarias.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Momentos L poblacionales y de la muestra

Los momentos L son un sistema alternativo para describir las formas de las FDP. Históricamente aparecen como modificaciones

records has followed approaches described by Khaliq *et al.* (2006). One of these approaches, perhaps the simplest one, applies the classical FDP of this theory, the General Distribution of Extreme Values (GVE) with three parameters ( $u$ ,  $a$ ,  $k$ ), allowing a translate or fit gradual when introducing the time  $t$  as a covariate in its location parameter  $u$ , keeping constant that of the scale  $a$  and that of the form  $k$  (Park *et al.*, 2011; Katz, 2013).

A nomenclature for these non-stationary FDPs has been established. El Adlouni *et al.* (2007) and Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2011) defined the stationary GVE function as  $GVE_0$ , which has its location parameter linearly variable with time ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t$ ) as  $GVE_1$  and when the variation is quadratic ( $u = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2$ ) is the  $GVE_2$ . In the  $GVE_{11}$  model, the location and scale parameters vary linearly with time. In the models cited, another covariate that has been used is some indicator of global or regional climatic variability (López de la Cruz y Francés, 2014; Franks *et al.*, 2015; Álvarez-Olguín y Escalante-Sandoval, 2016), as the Southern Oscillation Index (SOI). SOI is quantified as the difference in surface air pressure between Darwin, Australia and Tahiti in French Polynesia (Teegavarapu, 2012).

The objective of this study was to present in detail the generalization of the L-moments method to estimate the fitting parameters of the FDPs non-stationary  $GVE_1$  and  $GVE_2$ , which was proposed, applied and contrasted by El Adlouni and Ouarda (2008b), using as covariables, time  $t$  and SOI. This procedure was extended to the FDPs Generalized Logistics (LOG) and Generalized Pareto (PAG), which are models used in the analysis of frequencies of extreme hydrological data (Kim *et al.*, 2015) Four numerical applications are described with data from the specialized literature and the simplicity and usefulness of the L-moments method for the fit of the six non-stationary FDPs exposed is highlighted.

## MATERIALS AND METHODS

### Populations and sample L-moments

The L-moments are an alternative system to describe the forms of the FDP. Historically they appear as modifications of the weighted probability moments (*MPP*) developed by Greenwood *et al.* (1979). The *MPP*s of a random variable  $x$  with accumulated FDP  $F(x)$  were defined by the following quantities:

de los momentos de probabilidad ponderada (*MPP*) desarrollados por Greenwood *et al.* (1979). Los *MPP* de una variable aleatoria  $x$  con FDP acumulada  $F(x)$  los definieron las cantidades siguientes:

$$M_{p,r,s} = E\{x(F)^p F(x)^r [1 - F(x)]^s\} \quad (1)$$

Un caso especial es el siguiente:  $\beta_r = M_{1,r,0}$ . La ecuación 1, para una distribución con función de cuantiles  $x(F)$ , conduce a:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F) \cdot F^r dF \quad (2)$$

Esta ecuación puede contrastarse con la definición ordinaria de momentos, que es:

$$E(X^r) = \int_0^1 [x(F)]^r dF \quad (3)$$

La definición convencional de momentos involucra potencias sucesivas de la función de cuantiles  $x(F)$ , mientras que los *MPP* implican potencias sucesivas de  $F$  y por ello pueden considerarse integrales de  $x(F)$  ponderadas por polinomios  $F^r$ ; de ahí su nombre. Los *MPP* mejoran sustancialmente las propiedades del muestreo, porque los valores dispersos no los influyen (Asquith, 2011). Los momentos L son combinaciones lineales de los *MPP*, de la manera siguiente (Hosking y Wallis, 1997 son:

$$\lambda_1 = \beta_0 \quad (4)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (5)$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0 \quad (6)$$

$$\lambda_4 = 20 \cdot \beta_3 - 30 \cdot \beta_2 + 12 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (7)$$

Además, los cocientes ( $\tau$ ) de momentos L se definen, iniciando con  $L-Cv$ , que es análogo a este coeficiente, y después los de similitud con los coeficientes de asimetría y de curtosis, estos son:

$$\tau = \lambda_2 / \lambda_1 \quad (8)$$

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2 \quad (9)$$

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 \quad (10)$$

En una muestra de tamaño  $n$ , con sus elementos en orden ascendente ( $x_1 \leq x_2 \leq \dots x_n$ ), los estimadores insesgados de  $\beta_r$  son (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking y Wallis, 1997):

$$M_{p,r,s} = E\{x(F)^p F(x)^r [1 - F(x)]^s\} \quad (1)$$

Of particular interest is the following special case:  $\beta_r = M_{1,r,0}$ . For a distribution with function of quantiles  $x(F)$ , equation 1 leads to:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F) \cdot F^r dF \quad (2)$$

This equation can be contrasted with the ordinary definition of the moments, that is:

$$E(X^r) = \int_0^1 [x(F)]^r dF \quad (3)$$

The conventional definition of moments involves successive powers of the quantile function  $x(F)$ , while the *MPPs* involve successive powers of  $F$  and therefore can be considered as integrals of  $x(F)$  weighted by polynomials  $F^r$ ; hence its name. *MPPs* substantially improve the properties of sampling, as they are not influenced by scattered values (Asquith, 2011). The L-moments are linear combinations of the *MPPs*, as follows (Hosking and Wallis, 1997):

$$\lambda_1 = \beta_0 \quad (4)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (5)$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0 \quad (6)$$

$$\lambda_4 = 20 \cdot \beta_3 - 30 \cdot \beta_2 + 12 \cdot \beta_1 - \beta_0 \quad (7)$$

In addition, the quotients ( $\tau$ ) of L-moments are defined, starting with  $L-Cv$  which is analogous to this coefficient and then those of similarity with the coefficients of asymmetry and kurtosis, these are:

$$\tau = \lambda_2 / \lambda_1 \quad (8)$$

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2 \quad (9)$$

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 \quad (10)$$

In a sample of size  $n$ , with its elements in ascending order ( $x_1 \leq x_2 \leq \dots x_n$ ) the unbiased estimators of  $\beta_r$  are (Stedinger *et al.*, 1993; Hosking and Wallis, 1997) are:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \tag{11}$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_j \tag{12}$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)(n-2)} x_j \tag{13}$$

con la siguiente expresión general:

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_j \tag{14}$$

Los estimadores muestrales de  $\lambda_r$  serán  $l_r$ , están definidos por las ecuaciones 4 a 7 y los de los cocientes de momentos L serán  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$ , según las ecuaciones 8 a 10.

**Ajuste con momentos L de las distribuciones GVE, LOG y PAG**

Hosking y Wallis (1997) destacaron en su “Tabla 5.1”, que estas tres FDP, cuando su parámetro de forma es negativo ( $k < 0$ ), tienen colas derechas más gruesas o densas que todas las otras FDP, comúnmente utilizadas en los AFC. Debido a esto, las FDP han ganado aceptación en los análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos (El Adlouni *et al.* 2008a). Estas tres FDP también coinciden en tener un límite superior cuando  $k > 0$  y definir funciones de dos parámetros de ajuste, conocidas como Gumbel, Logística y Exponencial, cuando  $k = 0$ .

La solución inversa  $x(F)$  de las distribuciones GVE, LOG y PAG se citan a continuación, con ella se estiman las predicciones que se asocian a una cierta probabilidad de no excedencia ( $F$ ) y las ecuaciones que permiten estimar sus tres parámetros de ajuste ( $u, a, k$ ) correspondientes a la ubicación, escala y forma, con el método de momentos L.

Distribución GVE (Hosking y Wallis, 1997): intervalo de  $x: u + a/k \leq x < \infty$  si  $k < 0$ ;  $-\infty < x < \infty$  si  $k = 0$ ;  $-\infty < x \leq u + a/k$  si  $k > 0$ .

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (-\ln F)^k]; k \neq 0; \tag{15}$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \tag{16}$$

siendo:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \tag{11}$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_j \tag{12}$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)(n-2)} x_j \tag{13}$$

with the following general expression:

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_j \tag{14}$$

The sampling estimators of  $\lambda_r$  will be  $l_r$  being defined by equations 4 a 7 and those of the ratios of L-moments will be  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  and  $t_4$ , according to equations 8 to 10.

**Fitting with L-moments of the distributions GVE, LOG, and PAG**

Hosking and Wallis (1997) highlighted in their “Table 5.1”, that these three FDPs, when their shape parameter is negative ( $k < 0$ ), have their right tails thicker or denser than all other FDPs commonly used in the AFC; due to this they have gained acceptance in the analysis of frequencies of extreme hydrological data (El Adlouni *et al.*, 2008a). These three PDFs also coincide in having an upper limit when  $k > 0$  and defining functions of two fit parameters known as Gumbel, Logistics and Exponential, when  $k = 0$ .

Next, the inverse solution  $x(F)$  for the GVE, LOG and PAG distributions is cited, with which the predictions associated with a certain probability of non-exceedance ( $F$ ) are estimated and the equations that allow us to estimate their three fit parameters ( $u, a, k$ ) corresponding to the location, scale and form, with the method of L-moments.

Distribution GVE (Hosking and Wallis, 1997): interval of  $x: u + a/k \leq x < \infty$  si  $k < 0$ ;  $-\infty < x < \infty$  si  $k = 0$ ;  $-\infty < x \leq u + a/k$  si  $k > 0$ .

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (-\ln F)^k]; k \neq 0; \tag{15}$$

$$k \cong 7.8590 \cdot c + 2.9554 \cdot c^2 \tag{16}$$

siendo:

$$c = \frac{2}{3+t_3} - 0.63093 \tag{17}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1-2^{-k})} \tag{18}$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \tag{19}$$

Para evaluar la función gamma se utiliza la fórmula de Stirling (Davis, 1972):

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \tag{20}$$

Para la distribución LOG (Hosking y Wallis, 1997) el intervalo de  $x$  es idéntico al de la GVE.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left\{ 1 - \left[ \frac{(1-F)}{F} \right]^k \right\}; k \neq 0; \tag{21}$$

$$k = -t_3 \tag{22}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k} \tag{23}$$

$$u = l_1 - a \left[ \frac{1}{k} - \frac{\pi}{\text{sen}(\pi \cdot k)} \right] \tag{24}$$

Para la distribución PAG (Hosking y Wallis, 1997) el intervalo de  $x$  es  $u \leq x < \infty$  si  $k \leq 0$ ;  $u \leq x \leq u + a/k$  si  $k > 0$ .

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (1-F)^k]; k \neq 0 \tag{25}$$

$$k = \frac{1-3t_3}{1+t_3} \tag{26}$$

$$a = l_2(1+k) \cdot (2+k) \tag{27}$$

$$u = l_1 - l_2(2+k) \tag{28}$$

**Ajuste con momentos L de las distribuciones GVE<sub>1</sub> y GVE<sub>2</sub>**

La generalización del método de momentos L propuesta por El Adlouni y Ouarda (2008b) para el ajuste de la FDP no

$$c = \frac{2}{3+t_3} - 0.63093 \tag{17}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot k}{\Gamma(1+k) \cdot (1-2^{-k})} \tag{18}$$

$$u = l_1 - \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \tag{19}$$

For the evaluation of the Gamma function the Stirling formula (Davis, 1972) was used:

$$\Gamma(\varepsilon) \cong e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\varepsilon-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{12 \cdot \varepsilon} + \frac{1}{288 \cdot \varepsilon^2} - \frac{139}{51840 \cdot \varepsilon^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \varepsilon^4} + \dots \right) \tag{20}$$

Distribution LOG (Hosking and Wallis, 1997): interval of  $x$ , identical to that of the GVE.

$$x(F) = u + \frac{a}{k} \left\{ 1 - \left[ \frac{(1-F)}{F} \right]^k \right\}; k \neq 0; \tag{21}$$

$$k = -t_3 \tag{22}$$

$$a = \frac{l_2 \cdot \text{sen}(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k} \tag{23}$$

$$u = l_1 - a \left[ \frac{1}{k} - \frac{\pi}{\text{sen}(\pi \cdot k)} \right] \tag{24}$$

For distribution PAG (Hosking and Wallis, 1997) the interval of  $x$  is  $u \leq x < \infty$  if  $k \leq 0$ ;  $u \leq x \leq u + a/k$  if  $k > 0$ .

$$x(F) = u + \frac{a}{k} [1 - (1-F)^k]; k \neq 0 \tag{25}$$

$$k = \frac{1-3t_3}{1+t_3} \tag{26}$$

$$a = l_2(1+k) \cdot (2+k) \tag{27}$$

$$u = l_1 - l_2(2+k) \tag{28}$$

**Fitting with L-moments of the distribution GVE<sub>1</sub> and GVE<sub>2</sub>**

The generalization of the L-moments method proposed by El Adlouni and Ouarda (2008b) for the fitting of the

estacionaria tipo GVE<sub>1</sub> comienza por analizar el valor esperado según la expresión:

$$E[X] = u_t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \quad (29)$$

De esta ecuación se deduce que un estimador  $\hat{\delta}_2$  de  $\delta_2$  puede obtenerse mediante una regresión lineal simple entre la variable  $X$  y la covariable  $t$ . Después se define una nueva variable  $S_1$  con la expresión:

$$S_1 = X - \delta_2 \cdot t \quad (30)$$

De la ecuación 29 se deduce que la nueva variable se distribuye según una FDP tipo GVE<sub>0</sub> con parámetros  $\delta_1$ ,  $a$  y  $k$  que se estiman con las ecuaciones 16 a 19 del método de momentos L. Destaca que  $u$  (ecuación 19) es igual a  $\delta_1$ , con lo cual quedan estimados los cuatro parámetros de ajuste del modelo GVE<sub>1</sub>. La ecuación 30 corresponde a uno de los primeros enfoques simples, sugeridos para procesar registros hidrológicos con tendencia. Este consistente en retirar primero tal componente determinística (McCuen y Thomas, 1990; Campos-Aranda, 2012). Mudersbach y Jensen (2010) indicaron que este enfoque es práctico pero los resultados de su AFC son válidos sólo en el presente y las obras hidráulicas deben ser seguras al término de su vida útil. Por lo que se requiere que la creciente de diseño sea estimada en una fecha futura predeterminada.

El mismo enfoque se utiliza para introducir una dependencia cuadrática en el parámetro de ubicación  $u$ , por lo cual, las estimaciones  $\hat{\delta}_2$  y  $\hat{\delta}_3$  de  $\delta_2$  y  $\delta_3$  se obtienen mediante regresión lineal múltiple de la variable  $X$  contra  $t$  y  $t^2$ , o regresión polinomial de segundo grado de  $X$  contra  $t$ . La nueva variable  $S_2$  será:

$$S_2 = X - \delta_2 \cdot t - \delta_3 \cdot t^2 \quad (31)$$

Con las ecuaciones 16 a 19 aplicadas a la muestra de datos corregidos  $S_2$  se definen los parámetros restantes  $k$ ,  $a$  y  $\delta_1$  del modelo GVE<sub>2</sub>. El Adlouni y Ouarda (2008b) compararon por simulación numérica tres procedimientos para obtener los cuatro y cinco parámetros de ajuste de los modelos GVE<sub>1</sub> y GVE<sub>2</sub>; el método de máxima verosimilitud (Coles, 2001; Nadarajah, 2005; Katz, 2013), el de máxima verosimilitud generalizada (Martins y Stedinger, 2000; El Adlouni *et al.*, 2007) y su generalización de momentos L. Los autores concluyeron que el último es mejor que el primero, por su sesgo y error medio cuadrático menores, pero no supera al segundo, sobre todo en registros con asimetría importante.

non-stationary FPD type GVE<sub>1</sub> begins by analyzing the expected value according to the expression:

$$E[X] = u_t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \frac{a}{k} [1 - \Gamma(1+k)] \quad (29)$$

From this equation it is deduced that an estimator  $\hat{\delta}_2$  of  $\delta_2$  can be obtained by a simple linear regression between the variable  $X$  and the covariate  $t$ . Then a new variable  $S_1$  is defined with the expression:

$$S_1 = X - \delta_2 \cdot t \quad (30)$$

It is deduced from equation 29, that the new variable is distributed according to a FDP type GVE<sub>0</sub> with parameters  $\delta_1$ ,  $a$  and  $k$  that are estimated with equations 16 to 19 of the L-moments method, highlighting that  $u$  (equation 19) is equal to  $\delta_1$ , with which the four fitting parameters of the GVE<sub>1</sub> model are estimated. Equation 30 corresponds to one of the first simple approaches suggested to process hydrological records with tendency, consisting in removing first such a deterministic component (McCuen and Thomas, 1990, Campos-Aranda, 2012). As Mudersbach and Jensen (2010) have indicated, such an approach is practical but the results of its AFC are valid only in the present and hydraulic works must be safe at the end of their useful life, requiring that the flood of design be estimated in a predetermined future date.

The same approach is used to introduce a quadratic dependence on the location parameter  $u$ , therefore, the estimates  $\hat{\delta}_2$  and  $\hat{\delta}_3$  of  $\delta_2$  and  $\delta_3$  are obtained by means of a multiple linear regression of the variable  $X$  against  $t$  and  $t^2$ , or, a second-degree polynomial regression of  $X$  against  $t$ . The new variable  $S_2$  will be:

$$S_2 = X - \delta_2 \cdot t - \delta_3 \cdot t^2 \quad (31)$$

With the equations 16 to 19 applied to the corrected data sample  $S_2$ , the remaining parameters  $k$ ,  $a$  and  $\delta_1$  of the GVE<sub>2</sub> model are defined. El Adlouni and Ouarda (2008b) compared by numerical simulation three procedures for obtaining the four and five fitting parameters of the GVE<sub>1</sub> and GVE<sub>2</sub> models: the maximum likelihood method (Coles, 2001, Nadarajah, 2005, Katz, 2013), generalized maximum likelihood (Martins and Stedinger, 2000; El Adlouni *et al.*, 2007) and their generalization of the L-moments; they conclude that the latter is better than the first, because it has lower bias and mean square error, but it does not exceed the second, especially in records with important asymmetry.

**Ecuaciones de la regresión lineal**

La variable dependiente ( $y$ ) se considera que son los datos anuales hidrológicos  $X_i$  y los tiempos o años  $t_i$  son las abscisas ( $x$ ), en este caso iguales al  $i$ -ésimo valor  $i$ . Para probar si la pendiente ( $\delta_2$ ) de la recta de regresión, ajustada por mínimos cuadrados de los residuos, es estadísticamente diferente de cero se usa una prueba basada en la distribución de Student ( $DS$ ), definida por las ecuaciones siguientes (Ostle y Mensing, 1975):

$$X_i = b + \delta_2 \cdot t_i \tag{32}$$

$$b = \bar{X} - \delta_2 \cdot \bar{t} \tag{33}$$

$$\delta_2 = \frac{Cov(X,t)}{Var(t)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot i - \bar{X} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \bar{t}^2} \tag{34}$$

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,t)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(t)}} \tag{35}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \tag{36}$$

$$DS = \frac{\delta_2}{\sqrt{S_\delta^2}} \tag{37}$$

$$S_\delta^2 = \frac{S_E^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \tag{38}$$

$$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{(n-2)} \tag{39}$$

$\bar{X}$  y  $\bar{t}$  son las medias aritméticas,  $r_{xy}$  es el coeficiente de correlación lineal que varía de cero a  $\pm 1$ , la pendiente  $\delta_2$  tiene unidades de  $X$ /año y la ordenada al origen  $b$  de  $X$ .  $\hat{X}_i$  en la ecuación 39 es el valor estimado con la ecuación 32.  $S_E^2$  y  $S_\delta^2$  son las varianzas de los errores y de la pendiente, respectivamente. Si el valor absoluto calculado  $DS$  (ecuación 37) es mayor que el crítico ( $DS_c$ ), el que se obtiene para la distribución de Student con  $v=n-2$  grados de libertad y  $\alpha=5\%$  en una prueba de dos colas, la pendiente  $\delta_2$  es significativa; es decir, existe tendencia lineal. Para estimar el valor de  $DS_c$  se utiliza el algoritmo propuesto por Zelen y Severo (1972), con  $Z = 1.95996$  para una confiabilidad  $(1-\alpha)$  del 95%:

**Equations of linear regression**

It is considered that the dependent variable ( $y$ ) are the annual hydrological data  $X_i$  and the times or years  $t_i$  are the abscissas ( $x$ ), in this case equal to the  $i$ -th value  $i$ . To test if the slope ( $\delta_2$ ) of the regression line fitted by least squares of the residuals, is statistically different from zero, a test based on the Student's distribution ( $DS$ ) defined by the following equations was used (Ostle and Mensing, 1975):

$$X_i = b + \delta_2 \cdot t_i \tag{32}$$

$$b = \bar{X} - \delta_2 \cdot \bar{t} \tag{33}$$

$$\delta_2 = \frac{Cov(X,t)}{Var(t)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot i - \bar{X} \cdot \bar{t}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \bar{t}^2} \tag{34}$$

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,t)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(t)}} \tag{35}$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \tag{36}$$

$$DS = \frac{\delta_2}{\sqrt{S_\delta^2}} \tag{37}$$

$$S_\delta^2 = \frac{S_E^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \tag{38}$$

$$S_E^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{(n-2)} \tag{39}$$

$\bar{X}$  and  $\bar{t}$  are the arithmetic means;  $r_{xy}$  is the coefficient of linear correlation that varies from zero to a  $\pm 1$ . The slope  $\delta_2$  has units of  $X$ /year and the ordinate to the origin  $b$  of  $X$ . In equation 39,  $\hat{X}_i$  is the value estimated with equation 32.  $S_E^2$  and  $S_\delta^2$  are the variances of the errors and of the slope, respectively. If the calculated absolute value  $DS$  (equation 37) is greater than the critical ( $DS_c$ ), obtained for the Student distribution with  $v=n-2$  degrees of freedom and  $\alpha=5\%$ , in a two-tailed test, the slope  $\delta_2$  is significant, that is, there is a linear trend. To estimate the value of  $DS_c$ , the algorithm proposed by Zelen and Severo (1972) is used, with  $Z = 1.95996$  for a reliability  $(1-\alpha)$  of 95%:



$$DC_c = Z + G1/v + G2/v^2 + G3/v^3 + G4/v^4 \quad (40)$$

donde:

$$G1 = (Z^3 + Z)/4$$

$$G2 = (5Z^3 + 16Z^2 + 3Z)/96$$

$$G3 = (3Z^3 + 19Z^2 + 17Z^3 - 15Z)/384$$

$$G4 = (79Z^3 + 776Z^2 + 1482Z^3 - 1920Z^3 - 945Z)/92160$$

### Pendiente $\delta_2$ según criterio de Pranab Kumar Sen

Para verificar numéricamente el valor de  $\delta_2$ , con la ecuación 34, se usó el criterio de Sen (1968). Este utiliza la fórmula de la tendencia establecida en el test de Kendall, para estimar su pendiente, que se define como el valor mediano (MED) de las pendientes parciales, es decir:

$$\delta_2 = MED \left[ \frac{X_j - X_i}{j - i} \right] \text{ para toda } j > i \quad (41)$$

$X_j$  y  $X_i$  son los datos en los tiempos  $j$  e  $i$ , que representan años:  $n$  es el número de datos, entonces se tienen  $n(n - 1)/2$  pendientes parciales.  $\delta_2$  tiene unidades de  $X/\text{año}$  y su signo positivo define tendencias ascendentes y el negativo descendentes. Machiwal y Jha (2012) indicaron que este criterio es resistente o robusto a la presencia de valores dispersos (*outliers*).

### Ecuaciones de la regresión cuadrática

El polinomio cuadrático o parabólico para la tendencia no lineal entre los datos  $X_i$  y los años del registro  $t_i$  es (Campos-Aranda, 2003):

$$X = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2 \quad (42)$$

cuyo arreglo matricial de sus ecuaciones normales es:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^n X_i \cdot t_i^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

con solución:

$$T \cdot \delta = X \therefore \underline{\delta} = T^{-1} \cdot X \quad (44)$$

$$DC_c = Z + G1/v + G2/v^2 + G3/v^3 + G4/v^4 \quad (40)$$

where:

$$G1 = (Z^3 + Z)/4$$

$$G2 = (5Z^3 + 16Z^2 + 3Z)/96$$

$$G3 = (3Z^3 + 19Z^2 + 17Z^3 - 15Z)/384$$

$$G4 = (79Z^3 + 776Z^2 + 1482Z^3 - 1920Z^3 - 945Z)/92160$$

### Slope $\delta_2$ according to the Pranab Kumar Sen criterion

To verify numerically the value obtained from  $\delta_2$  with equation 34, the Sen criterion (1968) was used, which utilizes the formula of the trend established in the Kendall test, to estimate its slope, defining it as the median value (MED) of the partial slopes, that is:

$$\delta_2 = MED \left[ \frac{X_j - X_i}{j - i} \right] \text{ for all } j > i \quad (41)$$

$X_j$  and  $X_i$  are the data in the  $j$  and  $i$  times, which represent years: being  $n$  the number of data, then we have  $n(n - 1)/2$  partial slopes.  $\delta_2$  has units of  $X/\text{year}$  and its positive sign defines ascending tendencies and negative descending ones. Machiwal and Jha (2012) indicate that this criterion is resistant or robust to the presence of scattered values (*outliers*).

### Equations of the quadratic regression

The quadratic or parabolic polynomial for the nonlinear trend between the  $X_i$  data and the years of the  $t_i$  record is (Campos-Aranda, 2003):

$$X = \delta_1 + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot t^2 \quad (42)$$

whose matrix arrangement of its normal equations is:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^n X_i \cdot t_i^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

with solution:

$$T \cdot \delta = X \therefore \underline{\delta} = T^{-1} \cdot X \quad (44)$$

donde:  $T$  es una matriz cuadrada con inversa  $T^{-1}$ ,  $\delta$  es un vector columna de incógnitas y  $X$  es otro vector columna de términos independientes. El coeficiente de determinación  $R^2$  cuantifica el grado de correlación del ajuste polinomial, su numerador mide la mejora o reducción del error debido a la regresión y su denominador es la dispersión de la variable dependiente, es decir:

$$R^2 = \frac{Sx^2 - Se^2}{Sx^2} \tag{45}$$

siendo:

$$Sx^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \tag{46}$$

$$Se^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \delta_1 - \delta_2 \cdot t_i - \delta_3 \cdot t_i^2)^2 \tag{47}$$

Como  $Se^2$  siempre es menor que  $Sx^2$ , entonces  $R^2$  varía de cero a la unidad (cuando  $Se^2 = 0$ ) y su raíz cuadrada corresponde al coeficiente de correlación polinomial (Campos-Aranda, 2003).

**Ajuste con momentos L de las distribuciones  
LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub> y PAG<sub>2</sub>**

Rao y Hamed (2000) presentaron las ecuaciones del valor esperado de las distribuciones Logística Generalizada (LOG) y Pareto Generalizada (PAG), similares a la expresión 29 de la función GVE. Esto implica que la generalización de El Adlouni y Ouarda (2008b) del método de momentos L para ajustar FDP no estacionarias con parámetro de ubicación variable en el tiempo, también es aplicable en los modelos LOG y PAG.

**Error estándar de ajuste**

A mediados de la década de 1970 se estableció al error estándar de ajuste (EEA) como un indicador estadístico cuantitativo, ya que evalúa la desviación estándar de las diferencias entre los valores observados y los estimados con la FDP que se prueba; en este estudio son los modelos: GVE<sub>1</sub>, GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub> y PAG<sub>2</sub>. Su expresión es la siguiente (Kite, 1977; Pandey y Nguyen, 1999):

being,  $T$  a square matrix with inverse  $T^{-1}$ ,  $\delta$  a vector column of unknowns and  $X$  another vector column of independent terms. The coefficient of determination  $R^2$  quantifies the degree of correlation of the polynomial fitting, its numerator measures the improvement or reduction of the error due to the regression and its denominator is the dispersion of the dependent variable, that is:

$$R^2 = \frac{Sx^2 - Se^2}{Sx^2} \tag{45}$$

being:

$$Sx^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \tag{46}$$

$$Se^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \delta_1 - \delta_2 \cdot t_i - \delta_3 \cdot t_i^2)^2 \tag{47}$$

Since  $Se^2$  is always smaller than  $Sx^2$ , then  $R^2$  varies from zero to unity (when  $Se^2 = 0$ ) and its square root corresponds to the coefficient of polynomial correlation (Campos-Aranda, 2003).

**Fitting with L-moments of the distributions  
LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub>, and PAG<sub>2</sub>**

In Rao and Hamed (2000) the equations of the expected value of the Generalized Logistics (LOG) and Generalized Pareto (PAG) distributions can be found, similar to the expression 29 of the GVE function. This implies that the generalization of El Adlouni and Ouarda (2008b) of the L-moments method to fit non-stationary FDP with variable location parameter in time is also applicable in the LOG and PAG models.

**Standard error of fit**

In the mid-1970s the standard error of fit (EEA) was established as a quantitative statistical indicator, since it evaluates the standard deviation of the differences between the observed values and those estimated with the FDP that is tested; in this study the models: GVE<sub>1</sub>, GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>1</sub>, LOG<sub>2</sub>, PAG<sub>1</sub> and PAG<sub>2</sub>. Their expression is as follows (Kite, 1977, Pandey and Nguyen, 1999):

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{n - np}} \quad (48)$$

en la cual:  $n$  y  $np$  son el número de datos de la muestra y de parámetros de ajuste, en este caso cuatro y cinco,  $X_i$  son los datos ordenados de menor a mayor y  $\hat{X}_i$  son los valores estimados con la solución inversa  $x(F)$  o función de cuantiles, que utiliza el parámetro de ubicación variable, para una probabilidad de no excedencia estimada con la fórmula de Weibull (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n+1} \quad (49)$$

donde:  $m$  es el número de orden del dato, con 1 para el menor y  $n$  para el mayor.

#### Registros de valores máximos anuales por procesar

Cuatro registros de la literatura especializada se seleccionaron para ilustrar la aplicación de las FDP no estacionarias GVE, LOG y PAG con el método de generalización de los momentos L (El Adlouni y Ouarda, 2008b); sus valores se exponen en el Cuadro 1. Estos registros tienen datos aproximados, leídos en las gráficas donde fueron expuestos. El primer registro lo mostró Leclerc y Ouarda (2007) como ejemplo de una serie de gastos ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) con tendencia descendente en una estación hidrométrica del Río Dartmouth en Canadá, con  $630 \text{ km}^2$  de área de cuenca. El segundo registro es de precipitación máxima diaria (*PMD*) anual en milímetros, corresponde a la estación pluviométrica Andong de Corea del Sur (Park *et al.*, 2011) y fue seleccionado por su tendencia ascendente robusta.

El tercer registro procede de El Adlouni y Ouarda (2008b) y son datos generados aleatoriamente con una distribución  $\text{GVE}_2$ , los valores en sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_1 = 10$ ,  $\delta_2 = -0.10$ ,  $\delta_3 = 0.005$ ,  $a = 1.0$  y  $k = -0.10$  y corresponde a una serie de *PMD* con tendencia no lineal. El cuarto registro también procede de la referencia anterior, El Adlouni *et al.* (2007), Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2009) y Ouarda y El Adlouni (2011) la ha utilizado y corresponde a la *PMD* registrada en el periodo de 1952 a 2000 en la estación pluviométrica Tehachapi del sur de California, EUA. Estos valores guardan relación con SOI (Southern Oscillation Index) y por ello se emplearon como covariable.

#### Planteamiento general para los análisis probabilísticos

La relación de los valores de los datos ( $X$ ) en función del tiempo ( $t$ ) permite definir si existe tendencia lineal o cuadrática.

$$EEA = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{n - np}} \quad (48)$$

in which,  $n$  and  $np$  are the number of the sample data and of fitting parameters, in this case four and five;  $X_i$  are the ordered data from least to greatest and  $\hat{X}_i$  are estimated values with the inverse solution  $x(F)$  or quantile function that uses the variable location parameter, for a probability of non-exceedance estimated with the Weibull formula (Benson, 1962):

$$P(X < x) = \frac{m}{n+1} \quad (49)$$

where,  $m$  is the data order number, with 1 for the smallest and  $n$  for the largest one.

#### Records of annual maximum values to be processed

Four records of the specialized literature were selected to illustrate the application of the non-stationary FDPs GVE, LOG and PAG with the generalization method of the L-moments (El Adlouni and Ouarda, 2008b); their values are shown in Table 1. These records have approximate data read in the graphs where they were exposed. The first record was shown by Leclerc and Ouarda (2007) as an example of a series of flows ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) with a downward trend in a hydrometric station of the Dartmouth River in Canada, with  $630 \text{ km}^2$  of basin area. The second record is the annual daily maximum precipitation (*PMD*) in millimeters corresponding to the Andong rainfall station in South Korea (Park *et al.*, 2011) and was selected for its strong upward trend.

The third record comes from El Adlouni and Ouarda (2008b) and they are randomly generated data with a  $\text{GVE}_2$  distribution whose values in their fitting parameters were:  $\delta_1 = 10$ ,  $\delta_2 = -0.10$ ,  $\delta_3 = 0.005$ ,  $a = 1.0$  and  $k = -0.10$ ; corresponds to a *PMD* series with nonlinear trend. The fourth record also comes from the previous reference and has been used by El Adlouni *et al.* (2007), Aissaoui-Fqayeh *et al.* (2009) and Ouarda and El Adlouni (2011), corresponds to the *PMD* recorded in the period from 1952 to 2000 at the Tehachapi rainfall station in Southern California, U.S.A. These values are related to the SOI (Southern Oscillation Index) and, therefore, they will be used as a covariate.

#### General layout for probabilistic analysis

The graph of data values ( $X$ ) versus time ( $t$ ) allows defining if there is a linear or quadratic trend. When the trend is linear, the fitting parameters ( $\delta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $a$ ,  $k$ ) of the non-stationary FDPs

**Cuadro 1. Datos máximos anuales por procesar de gasto (*Q*), precipitación máxima diaria (*PMD*) e índice de la oscilación del sur (SOI) en las estaciones indicadas.**

**Table 1. Maximum annual data to be processed of flow (*Q*), maximum daily precipitation (*PMD*) and southern oscillation index (SOI) in the indicated stations.**

Número	Dartmouth		Andong		Ficticia		Tehachapi		SOI
	Año	<i>Q</i>	Año	<i>PMD</i>	Año	<i>PMD</i>	Año	<i>PMD</i>	
1	1974	154	1973	60	1961	16.0	1952	15	-0.2
2	1975	227	1974	67	1962	18.6	1953	17	0.8
3	1976	217	1975	120	1963	10.0	1954	13	0.9
4	1977	398	1976	76	1964	10.4	1955	38	-0.7
5	1978	238	1977	87	1965	10.5	1956	29	-0.6
6	1979	244	1978	27	1966	8.3	1957	45	-0.3
7	1980	150	1979	-	1967	8.1	1958	21	0.5
8	1981	346	1980	-	1968	10.5	1959	37	1.2
9	1982	223	1981	-	1969	13.3	1960	24	0.2
10	1983	180	1982	-	1970	10.2	1961	36	-0.9
11	1984	145	1983	129	1971	9.6	1962	16	-0.6
12	1985	122	1984	121	1972	9.2	1963	25	0.4
13	1986	99	1985	88	1973	15.5	1964	12	-0.3
14	1987	198	1986	82	1974	12.5	1965	36	0.7
15	1988	191	1987	87	1975	9.2	1966	17	0.4
16	1989	129	1988	78	1976	22.3	1967	16	-0.5
17	1990	214	1989	62	1977	13.4	1968	56	-0.2
18	1991	195	1990	69	1978	9.5	1969	35	-1.1
19	1992	173	1991	100	1979	13.2	1970	36	0.6
20	1993	101	1992	75	1980	13.0	1971	13	-0.2
21	1994	159	1993	114	1981	8.6	1972	34	-0.5
22	1995	148	1994	69	1982	7.8	1973	42	-0.4
23	1996	158	1995	109	1983	10.3	1974	17	1.5
24	1997	225	1996	90	1984	9.0	1975	18	1.4
25	1998	175	1997	119	1985	8.6	1976	31	-0.8
26	1999	275	1998	114	1986	16.1	1977	21	2.1
27	2000	144	1999	97	1987	10.1	1978	17	0.1
28	2001	192	2000	170	1988	9.2	1979	19	1.4
29	2002	65	2001	94	1989	15.3	1980	41	-0.1
30	2003	142	2002	115	1990	13.5	1981	82	-1.4
31	-	-	2003	103	1991	12.2	1982	18	-0.2
32	-	-	2004	129	1992	12.7	1983	45	-0.5
33	-	-	2005	77	1993	10.3	1984	35	-0.6
34	-	-	2006	102	1994	19.9	1985	19	0.3
35	-	-	2007	89	1995	19.6	1986	87	-3.2
36	-	-	-	-	1996	13.9	1987	29	-0.2
37	-	-	-	-	1997	15.8	1988	28	0.1
38	-	-	-	-	1998	13.7	1989	29	-0.2
39	-	-	-	-	1999	16.7	1990	19	-1.5
40	-	-	-	-	2000	15.7	1991	22	-0.4
41	-	-	-	-	2001	18.7	1992	16	1.2
42	-	-	-	-	2002	21.9	1993	17	-0.8
43	-	-	-	-	2003	18.8	1994	41	-0.4
44	-	-	-	-	2004	30.0	1995	48	-1.9
45	-	-	-	-	2005	22.1	1996	49	-0.9
46	-	-	-	-	2006	17.2	1997	26	-0.3
47	-	-	-	-	2007	22.6	1998	71	-0.6
48	-	-	-	-	2008	18.7	1999	33	0.2
49	-	-	-	-	2009	22.2	2000	27	0.3
50	-	-	-	-	2010	22.6	-	-	-

Cuando la tendencia es lineal, se estiman los parámetros de ajuste ( $\delta_2, \delta_1, a, k$ ) de las FDP no estacionarias GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub> y PAG<sub>1</sub>, se cuantifica su *EEA* con la ecuación 48, para seleccionar la FDP que conduce al valor menor de tal indicador. Cuando la tendencia es curva se prueban las FDP no estacionarias GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>2</sub> y PAG<sub>2</sub>; para ello, se estiman sus parámetros de ajuste ( $\delta_2, \delta_3, \delta_1, a, k$ ), se cuantifica su *EEA*, adoptando la que aportó el valor menor. En este proceso, puede adoptarse una FDP no estacionaria, con base en juicios de conveniencia; por ejemplo, las predicciones más desfavorables o críticas. Lo anterior se ilustra en la primera aplicación numérica.

En los análisis que usan el tiempo ( $t$ ) como covariable, con base en las soluciones inversas (ecuaciones 15, 21 y 25) de las distribuciones GVE, LOG y PAG, se calcularon predicciones con periodos de retorno ( $Tr$ ) de 2, 25, 50 y 100 años, a través del periodo de registro, se aplicó variable el parámetro de ubicación  $u$ . La primera predicción corresponde a la mediana, ya que su probabilidad de no excedencia ( $F$ ) es de 50 % y las tres siguientes se calcularon para probabilidades complementarias, y definir su valor superior e inferior (Park *et al.*, 2011); es decir, para los valores siguientes:  $F = 0.96$  y  $F = 0.04$  para el  $Tr$  de 25 años;  $F = 0.98$  y  $F = 0.02$  para el  $Tr$  de 50 años y  $F = 0.99$  y  $F = 0.01$  para el  $Tr$  de 100 años. Además, en estos análisis se hicieron predicciones para los años 2020, 2050 y 2100. Las predicciones correspondientes a  $Tr$  de 2, 25, 50 y 100 años, cuando la covariable es SOI, fluctúan según su magnitud y entonces sus valores máximos se indican en la magnitud extrema de SOI. En este caso, las predicciones para el futuro son posibles si se utilizan valores pronosticados de SOI.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Predicciones en una estación de aforos del río Dartmouth

Los datos mostraron tendencia lineal descendente y significativa, ya que  $DS = -2.2931$  y  $DS_c = 2.0484$  (Figura 1). En el registro, *EEA* de las FDP no estacionarias GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub> y PAG<sub>1</sub> fueron 42.0, 43.1 y 41.6 m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Debido a la semejanza numérica de los *EEA*, los resultados de la función LOG<sub>1</sub> se adoptaron por conducir a las predicciones más grandes o críticas. Sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_2 = -3.125$ ,  $\delta_1 = 227.919$ ,  $a = 33.318$  y  $k = -0.144$ ; con coeficiente de correlación lineal de  $-0.3976$  y pendiente de  $-2.8182$ , según criterio de Sen. El registro de 30 datos concluyó en 2003 (Cuadro 2) y el valor del tiempo  $t$  en 2020, 2050 y 2100 fue 47, 77 y 127.

GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub> and PAG<sub>1</sub> are estimated, their *EEA* is quantified with equation 48, to select the FPD that leads to the lowest value of such indicator. When the trend is curved, the non-stationary PDFs the GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>2</sub> and PAG<sub>2</sub> are tested; for this, their fitting parameters are estimated ( $\delta_2, \delta_3, \delta_1, a, k$ ), their *EEA* is quantified, adopting the one that contributed the lowest value. In this process, a non-stationary FDP can be adopted, based on judgments of convenience, for example, the most unfavorable or critical predictions. The above is illustrated in the first numerical application.

In the analyses that use time ( $t$ ) as a covariate, based on the inverse solutions (equations 15, 21 and 25) of the GVE, LOG and PAG distributions, predictions with return periods ( $Tr$ ) of 2, 25, 50 and 100 years were calculated, through the registration period, the location parameter variable  $u$  was applied. The first prediction corresponds to the median, since its probability of non-exceedance ( $F$ ) is 50 % and the following three are calculated for complementary probabilities, to define its superior and inferior value (Park *et al.*, 2011), that is, for the following values:  $F = 0.96$  and  $F = 0.04$  for the  $Tr$  of 25 years;  $F = 0.98$  and  $F = 0.02$  for the  $Tr$  of 50 years and  $F = 0.99$  and  $F = 0.01$  for the  $Tr$  of 100 years. Furthermore, in these analyses, predictions were made for the future, in the years 2020, 2050 and 2100. When the covariate is the SOI, the predictions corresponding to the  $Tr$  of 2, 25, 50 and 100 years, fluctuate according to the magnitude of the SOI and then its maximum values are indicated in the extreme magnitude of the SOI. In this case, future predictions are possible using prognostic SOI values.

## RESULTS AND DISCUSSION

### Predictions at a Dartmouth River gauging station

These data show a linear descent and significant trend, since  $DS = -2.2931$  and  $DS_c = 2.0484$  (Figure 1). In this record, the *EEAs* of the non-stationary FDPs GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub> and PAG<sub>1</sub> are 42.0, 43.1 and 41.6 m<sup>3</sup>·s<sup>-1</sup>. Due to the numerical similarity that the *EEA* have, the results of the function LOG<sub>1</sub> are adopted because they lead to the largest or most critical predictions. Their fitting parameters are  $\delta_2 = -3.125$ ,  $\delta_1 = 227.919$ ,  $a = 33.318$  and  $k = -0.144$ ; with a linear correlation coefficient of  $-0.3976$  and a slope of  $-2.8182$  as Sen criterion. Table 2 shows some of the predictions within the record and in the future on three pre-fixed dates. This record of 30 data ends in 2003, therefore, the value of time  $t$  in 2020 is 47, in 2050 it is 77 and in 2100 it was 127.

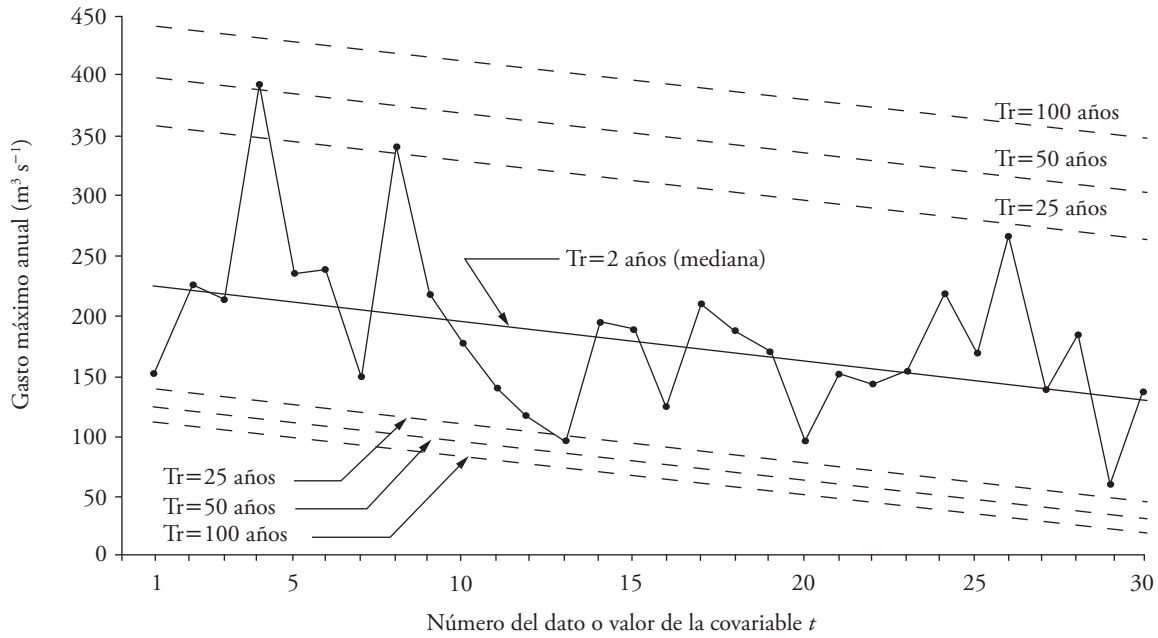


Figura 1. Datos y rectas de predicciones estimadas con la distribución  $LOG_1$  en una estación hidrométrica del río Dartmouth, Canadá.

Figure 1. Diagram of data and rights of predictions estimated with the  $LOG_1$  distribution in a hydrometric station of the Dartmouth River, Canada.

**Predicciones en la estación pluviométrica Andong**

**Predictions at the Andong pluviometric station**

Este registro de *PMD* tuvo tendencia lineal ascendente y significativa, debido a que  $DS = 2.1568$  y

This *PMD* record has a linear upward and significant trend, because  $DS = 2.1568$  and  $DS_c =$

Cuadro 2. Predicciones ( $m^3 \cdot s^{-1}$ ) en el periodo histórico y futuro en una estación hidrométrica del río Dartmouth, con base en FDP no estacionaria  $LOG_1$ .

Table 2. Predictions ( $m^3 \cdot s^{-1}$ ) in the historical period and in the future in a hydrometric station of the Dartmouth River, based on the non-stationary FDP  $LOG_1$ .

Número (t)	Año	Gasto (Q)	$T_r^i=2$ años (Mediana)		$T_r=25$ años		$T_r=50$ años		$T_r=100$ años	
			VS <sup>†</sup>	VI <sup>‡</sup>	VS	VI	VS	VI		
1	1974	154	224.8	139.8	398.7	125.5	441.8	112.8		
10	1983	180	196.7	111.7	370.5	97.4	413.7	84.7		
20	1993	101	165.4	80.5	339.3	66.2	382.5	53.4		
30	2003	142	134.2	49.2	308.0	34.9	351.2	22.2		

Número (t)	Año	$u^b$	$T_r^i=2$ años (Mediana)		$T_r=25$ años		$T_r=50$ años		$T_r=100$ años	
			VS	VI	VS	VI	VS	VI		
47	2020	81.0	81.0	0.0	215.3	0.0	254.9	0.0	298.1	0.0
77	2050	-12.7	-12.7	0.0	121.6	0.0	161.2	0.0	204.3	0.0
127	2100	-169.0	-169.0	0.0	0.0	0.0	4.9	0.0	48.1	0.0

<sup>†</sup>Periodo de retorno. <sup>‡</sup>Valor superior. <sup>§</sup>Valor inferior. <sup>b</sup>Parámetro de ubicación. <sup>†</sup>Return period. <sup>‡</sup>Higher value. <sup>§</sup>Lower value. <sup>b</sup>Location parameter.

$DSc = 2.0452$  (Figura 2). El ajuste de FDP no estacionarias  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  y  $PAG_1$  condujo a  $EEA$ , en milímetros, de 9.8, 8.8 y 11.9. Para este registro se adoptó la función  $LOG_1$ , por lograr el menor  $EEA$ , sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_2 = 1.1101$ ,  $\delta_1 = 73.805$ ,  $a = 13.740$  y  $k = -0.113$ , el coeficiente de correlación lineal fue 0.3718 y la pendiente 1.100, de acuerdo son el criterio de Sen. El registro de las predicciones abarcó 31 datos (Cuadro 3) y concluyó en el año 2007, la magnitud del tiempo  $t$  en 2020, 2050 y 2100 fue 44, 74 y 124.

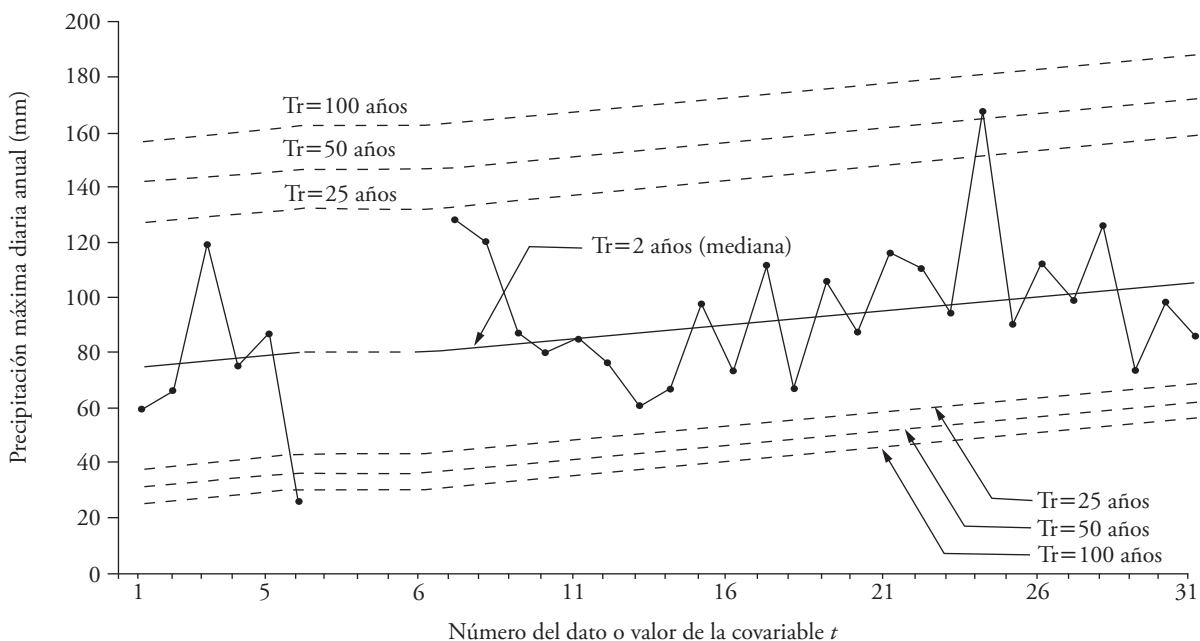
### Predicciones en una estación pluviométrica ficticia

El registro  $PMD$  tuvo tendencia curva ascendente (Figura 3). El ajuste de las FDP no estacionarias  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  y  $PAG_2$  condujo a  $EEA$ , en milímetros, de 2.4, 2.3 y 2.5. La función  $LOG_2$  se adoptó, por lograr el  $EEA$  menor; sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_2 = -0.3367$ ,  $\delta_3 = 0.0109$ ,  $\delta_1 = 12.828$ ,  $a = 1.618$  y  $k = -0.264$ , con coeficiente de correlación polinomial de 0.7415. En él se muestra una parte de las predicciones dentro del registro y a futuro en tres fechas prefijadas. El registro de 50 datos concluyó en 2010

2.0452 (Figure 2). The fitting of the non-stationary PDFs  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  and  $PAG_1$  led to the following  $EEAs$  in millimeters: 9.8, 8.8 and 11.9. For this record the  $LOG_1$  function is adopted, for achieving the lowest  $EEA$ , its fitting parameters were:  $\delta_2 = 1.1101$ ,  $\delta_1 = 73.805$ ,  $a = 13.740$  and  $k = -0.113$ ; with a linear correlation coefficient of 0.3718 and a slope of 1.100 according to the Sen criterion. Table 3, lists a part of the predictions within the record and in the future on three pre-fixed dates. As this record covers 31 data and concludes in 2007, the magnitude of time  $t$  in 2020 is 44, in 2050 it is 74 and in 2100 it was 124.

### Predictions in a pluviometric fictitious station

This  $PMD$  record has an upward curve trend (Figure 3). The fitting of the non-stationary PDFs  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  and  $PAG_2$  led these values of the  $EEA$  in millimeters: 2.4, 2.3 and 2.5. The  $LOG_2$  function is adopted to achieve the lowest  $EEA$ ; its fitting parameters were:  $\delta_2 = -0.3367$ ,  $\delta_3 = 0.0109$ ,  $\delta_1 = 12.828$ ,  $a = 1.618$  and  $k = -0.264$ , with a polynomial correlation coefficient of 0.715. Table 4 shows a part of the predictions within the record and in future in three pre-fixed dates. This record of 50



**Figura 2. Datos y predicciones estimadas con la distribución  $LOG_1$  en la estación pluviométrica Andong, Corea del Sur.**  
**Figure 2. Diagram of data and predictions estimated with the distribution  $LOG_1$  in the pluviometric station Andong, South Korea.**

**Cuadro 3. Predicciones (mm) en el periodo histórico y a futuro en la estación pluviométrica Andong, con base en la FDP no estacionaria LOG<sub>1</sub>.**

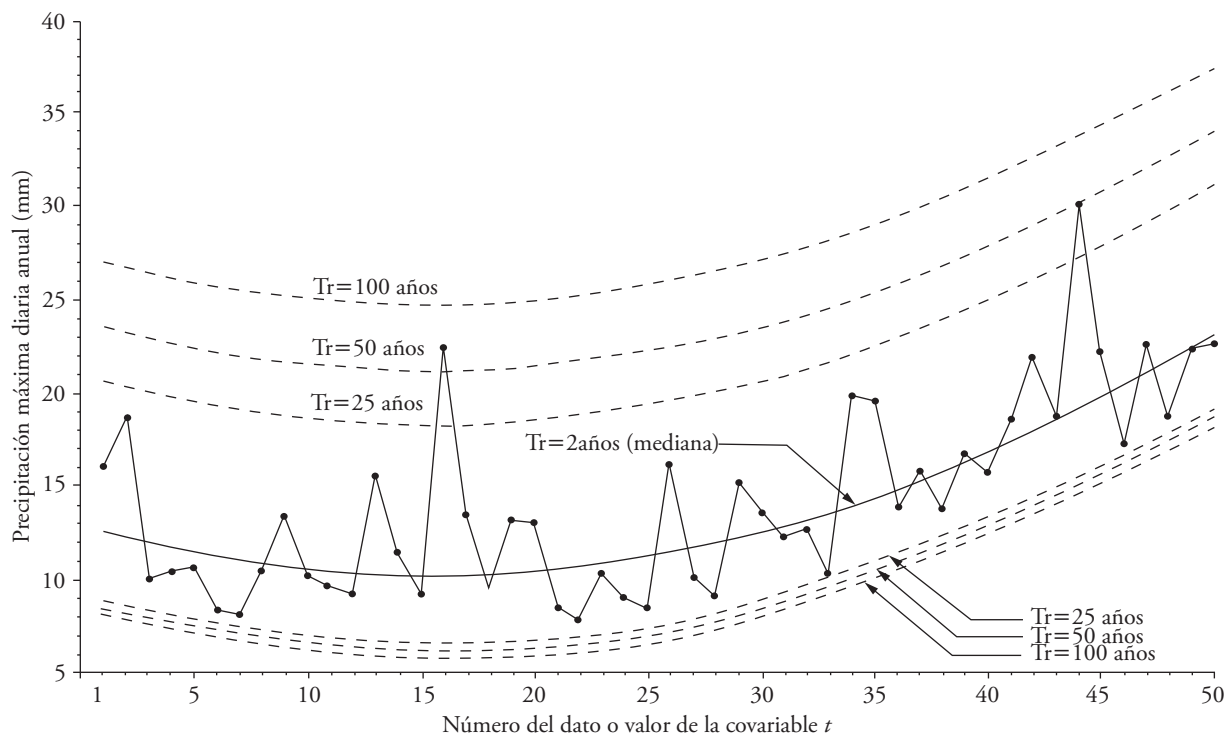
**Table 3. Predictions (mm) in the historical period and in the future in the Andong pluviometric station, based on the non-stationary FDP LOG<sub>1</sub>.**

Número (t)	Año	PMD	Tr <sup>i</sup> = 2 años		Tr = 25 años		Tr = 50 años		Tr = 100 años	
			(Mediana)	VS <sup>a</sup>	VI <sup>b</sup>	VS	VI	VS	VI	
1	1973	60	74.9	127.5	38.2	142.1	31.7	157.7	25.7	
10	1986	82	84.9	137.5	48.2	152.1	41.7	167.7	35.7	
20	1996	90	96.0	148.6	59.3	163.2	52.8	178.8	46.8	
31	2007	89	108.2	160.8	71.5	175.4	65.0	191.0	59.0	

Número (t)	Año	u <sup>b</sup>	Tr = 2 años		Tr = 25 años		Tr = 50 años		Tr = 100 años	
			(Mediana)	VS	VI	VS	VI	VS	VI	
44	2020	122.6	122.6	175.2	86.0	189.8	79.4	205.4	73.4	
74	2050	156.0	156.0	208.5	119.3	223.1	112.7	238.8	106.7	
124	2100	211.5	211.5	264.0	174.8	278.6	168.2	294.3	162.2	

<sup>i</sup>Periodo de retorno. <sup>a</sup>Valor superior. <sup>b</sup>Valor inferior. <sup>b</sup>Parámetro de ubicación. ♦ <sup>i</sup>Return period. <sup>a</sup>Higher value. <sup>b</sup>Lower value. <sup>b</sup>Location parameter.



**Figura 3. Datos y curvas de predicción estimadas con la distribución LOG<sub>2</sub> en una estación pluviométrica ficticia.**  
**Figure 3. Diagram of data and curves of prediction estimated with the distribution LOG<sub>2</sub> in a fictitious pluviometric station.**

(Cuadro 4), entonces la magnitud del tiempo *t* en 2020, 2050 y 2100 fue 60, 90 y 140.

data ends in the year 2010, then the magnitude of time *t* in 2020 is 60, in 2050 it is 90 and in 2100 it was 140.



**Predicciones en la estación pluviométrica Tehachapi**

El registro *PMD* anual en función de SOI (Figura 4) indica que no es posible seleccionar entre una tendencia descendente lineal o una curva, por lo que se aplicaron los dos ajustes. Las FDP no estacionarias  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  y  $PAG_1$  condujeron a valores del *EEA*, en milímetros, de 11.6, 11.4 y 12.2. Para este ajuste lineal se adoptó la función  $LOG_1$ , por obtener el *EEA* menor; sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_2 = -10.2657$ ,  $\delta_1 = 28.376$ ,  $a = 7.570$  y  $k = -0.104$ , con coeficiente de correlación lineal de  $-0.5680$ . Parte de las predicciones dentro del registro se incluyen en el Cuadro 5.

Las FDP no estacionarias  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  y  $PAG_2$  condujeron a *EEA* en milímetros de 12.8, 12.7 y 13.3. Para este ajuste no lineal se adoptó la función  $LOG_2$ , por alcanzar el valor menor de *EEA*, sus parámetros de ajuste fueron:  $\delta_2 = -8.7385$ ,  $\delta_3 = 2.8432$ ,  $\delta_1 = 25.936$ ,  $a = 6.942$  y  $k = -0.127$  y coeficiente de correlación polinomial de 0.6279. Parte de las predicciones dentro de registro se incluyeron en el Cuadro 6.

La selección entre las dos FDP no estacionarias  $LOG_1$  o  $LOG_2$  no debe basarse en el *EEA*, sino en el mejor ajuste logrado con las parejas de datos de  $X_i$

**Predictions in the pluviometric station Tehachapi**

Figure 4 shows the annual *PMD* record is shown in the ordinates against their corresponding values of the SOI on the abscissa, since it is not possible to select between a linear descending trend or a curve, the two fits will be applied. The non-stationary PDFs  $GVE_1$ ,  $LOG_1$  and  $PAG_1$  lead to the following values of the *EEA* in millimeters: 11.6, 11.4 and 12.2. For this linear fitting, the  $LOG_1$  function is adopted for achieving the lowest *EEA*; its fitting parameters were:  $\delta_2 = -10.2657$ ,  $\delta_1 = 28.376$ ,  $a = 7.570$  and  $k = -0.104$ , with a linear correlation coefficient of  $-0.5680$ . Table 5 shows a part of the prediction within the record.

The non-stationary FDPs  $GVE_2$ ,  $LOG_2$  and  $PAG_2$  lead to the following values of the *EEA* in millimeters: 12.8, 12.7 and 13.3. For this non-linear fitting, the  $LOG_2$  function is adopted, to achieve the lowest *EEA* value; its fitting parameters were:  $\delta_2 = -8.7385$ ,  $\delta_3 = 2.8432$ ,  $\delta_1 = 25.936$ ,  $a = 6.942$  and  $k = -0.127$ , with a polynomial correlation coefficient of 0.6279. Table 6 shows a part of the predictions within the record.

The selection between the two non-stationary FDPs  $LOG_1$  or  $LOG_2$  should not be based on the

**Cuadro 4. Predicciones (mm) en el periodo histórico y a futuro en la estación pluviométrica ficticia, con base en la FDP no estacionaria  $LOG_2$ .**

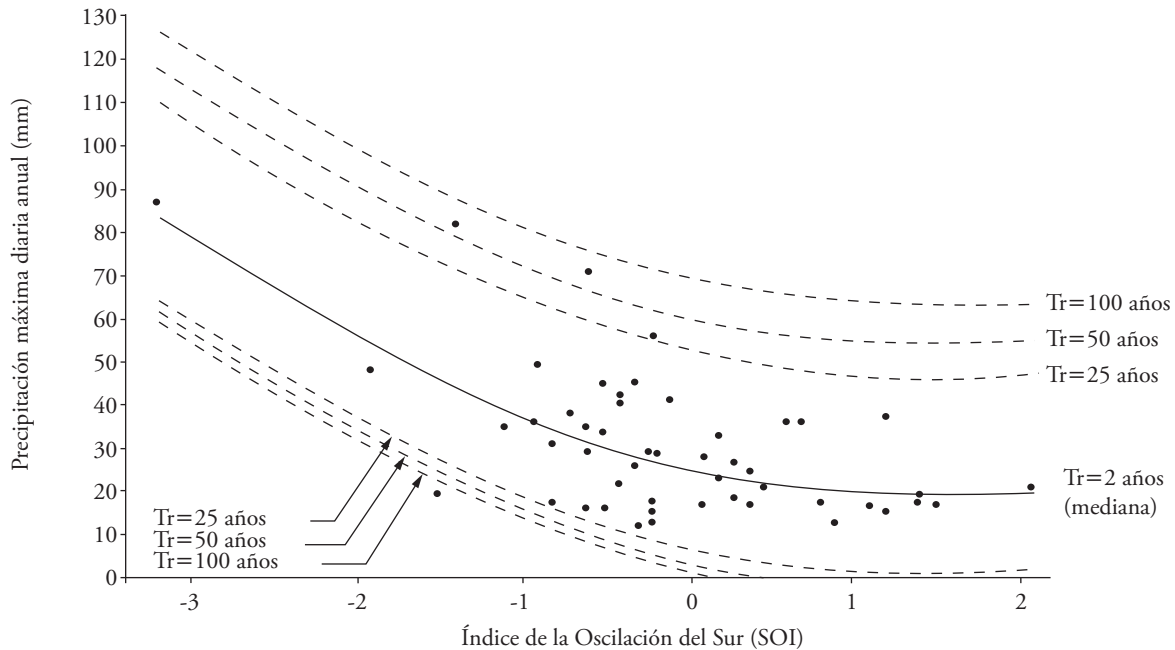
**Table 4. Predictions (mm) in the historic period and in future in the fictitious pluviometric station, based on the non-stationary FDP  $LOG_2$ .**

Número (t)	Año	PMD	Tr=2 años		Tr=25 años		Tr=50 años		Tr=100 años	
			(Mediana)	VS*	VI <sup>§</sup>	VS	VI	VS	VI	
1	1961	16.0	12.5	20.6	9.0	23.5	8.6	27.0	8.2	
10	1970	10.2	10.5	18.6	7.1	21.6	6.6	25.1	6.2	
20	1980	13.0	10.4	18.5	7.0	21.4	6.5	24.9	6.1	
30	1990	13.5	12.5	20.6	9.0	23.5	8.6	27.0	8.2	
40	2000	15.7	16.8	24.8	13.3	27.8	12.8	31.3	12.5	
50	2010	22.6	23.2	31.2	19.7	34.2	19.2	37.7	18.9	

Número (t)	Año	u <sup>b</sup>	Tr=2 años		Tr=25 años		Tr=50 años		Tr=100 años	
			(Mediana)	VS	VI	VS	VI	VS	VI	
60	2020	31.8	31.8	39.8	28.3	42.8	27.8	46.3	27.5	
90	2050	70.6	70.6	78.7	67.1	81.6	66.7	85.1	66.3	
140	2100	178.8	178.8	186.9	175.3	189.8	174.9	193.3	174.5	

<sup>†</sup>Periodo de retorno. <sup>\*</sup>Valor superior. <sup>§</sup>Valor inferior. <sup>b</sup>Parámetro de ubicación. <sup>‡</sup>Return period. <sup>¶</sup> Higher value. <sup>§</sup>Lower value. <sup>b</sup>Location parameter.



**Figura 4. Predicciones estimadas con la distribución LOG<sub>2</sub> en la estación pluviométrica Tehachapi del sur de California, EUA.**  
**Figure 4. Estimated prediction curves with the LOG<sub>2</sub> distribution in the Tehachapi pluviometric station in Southern California, U.S.A.**

**Cuadro 5. Predicciones (mm) en el periodo histórico en la estación pluviométrica Tehachapi, con base en la FDP no estacionaria LOG<sub>1</sub>.**  
**Table 5. Predictions (mm) in the historic period in the pluviometric station Tehachapi, based on the non-stationary FDP LOG<sub>1</sub>.**

Número	Datos		$T_r^{\ddagger}=2$ años		$T_r=25$ años		$T_r=50$ años		$T_r=100$ años	
	SOI	PMD	(Mediana)	VS <sup>‡</sup>	VI <sup>§</sup>	VS	VI	VS	VI	
26	2.1	21	6.8	35.3	0.0	43.1	0.0	51.4	0.0	
23	1.5	17	13.0	41.5	0.0	49.3	0.0	57.5	0.0	
3	0.9	13	19.1	47.6	0.0	55.4	0.0	63.7	0.0	
7	0.5	21	23.2	51.7	2.7	59.5	0.0	67.8	0.0	
29	-0.1	41	29.4	57.9	8.9	65.7	5.2	73.9	1.7	
30	-1.4	82	42.7	71.2	22.2	79.0	18.5	87.3	15.1	
44	-1.9	48	47.9	76.4	27.4	84.2	23.6	92.4	20.2	
35	-3.2	87	61.2	89.7	40.7	97.5	37.0	105.8	33.5	

<sup>‡</sup>Periodo de retorno. <sup>‡</sup>Valor superior. <sup>§</sup>Valor inferior. <sup>‡</sup>Return period. <sup>‡</sup>Higher value. <sup>§</sup>Lower value.

y SOI<sub>t</sub>, lo cual se alcanzó con un parámetro de ubicación con variación cuadrática con respecto a SOI, con 0.6274 como coeficiente de correlación polinomial. Además, el ajuste condujo a predicciones superiores en el valor extremo histórico de SOI de -3.2, relativo al año 1986.

EEA, but on the best fitting achieved with the X<sub>t</sub> and SOI<sub>t</sub> data pairs, which was achieved with a location parameter with quadratic variation with respect to the SOI, which defines a 0.6274 as a polynomial correlation coefficient. In addition, such fitting leads to higher predictions in the historical extreme value of the SOI of -3.2, relative to the year of 1986.

**Cuadro 6. Predicciones (mm) en el periodo histórico en la estación pluviométrica Tehachapi, con base en la FDP no estacionaria LOG<sub>2</sub>.****Table 6. Predictions (mm) in the historic period in the pluviometric station Tehachapi, based on the non-stationary FDP LOG<sub>2</sub>.**

Número	Datos		$T_r^{\ddagger}=2$ años	$T_r^{\ddagger}=25$ años		$T_r^{\ddagger}=50$ años		$T_r^{\ddagger}=100$ años	
	SOI	PMD	(Mediana)	VS <sup>‡</sup>	VI <sup>§</sup>	VS	VI	VS	VI
26	2.1	21	20.1	47.3	2.0	55.0	0.0	63.4	0.0
23	1.5	17	19.2	46.4	1.1	54.1	0.0	62.5	0.0
3	0.9	13	20.4	47.5	2.2	55.3	0.0	63.7	0.0
7	0.5	21	22.3	49.4	4.1	57.2	1.0	65.6	0.0
29	-0.1	41	26.8	54.0	8.7	61.8	5.5	70.1	2.7
30	-1.4	82	43.7	70.9	25.6	78.7	22.4	87.0	19.6
44	-1.9	48	52.8	80.0	34.6	87.7	31.5	96.1	28.6
35	-3.2	87	83.0	110.2	64.9	117.9	61.7	126.3	58.8

<sup>‡</sup>Periodo de retorno. <sup>‡</sup>Valor superior. <sup>§</sup>Valor inferior. <sup>♦</sup>Return period. <sup>‡</sup> Higher value. <sup>§</sup>Lower value.

## CONCLUSIONES

La generalización del método de los momentos L que propusieron El Adlouni y Ouarda (2008b) para ajustar la distribución GVE no estacionaria, se amplió a las funciones LOG y PAG, que son modelos de uso general en los análisis de frecuencias de datos hidrológicos extremos.

En este estudio se usaron seis distribuciones no estacionarias, GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub>, PAG<sub>1</sub>, GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>2</sub> y PAG<sub>2</sub>, las que se aplicaron a tres registros con tendencia y un cuarto de precipitación máxima diaria anual, relacionada con el índice de la oscilación de sur. La selección del mejor ajuste se basó en el error estándar de ajuste y en el coeficiente de correlación entre los datos y la covariable.

A través de las cuatro aplicaciones numéricas se demuestra la sencillez del procedimiento operativo y el contraste de resultados con los obtenidos en las referencias de procedencia de esos datos, permitió verificar empíricamente su exactitud. Con base en las predicciones, se destaca su importancia y utilidad de los análisis probabilísticos de registros hidrológicos extremos no estacionarios.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al editor designado su opinión de aceptación e inclusión del artículo. Al árbitro 2 se agradecen sus múltiples correcciones a la redacción.

## CONCLUSIONS

The generalization of the method of the L-moments proposed by El Adlouni and Ouarda (2008b) for the fitting of the General distribution of Extreme Values (GVE) non-stationary was extended to the Generalized Logistics (LOG) and Generalized Pareto (PAG) functions, which are models of general use in the analysis of frequencies of extreme hydrological data.

In this study, six non-stationary distributions were used: GVE<sub>1</sub>, LOG<sub>1</sub>, PAG<sub>1</sub>, GVE<sub>2</sub>, LOG<sub>2</sub> and PAG<sub>2</sub>; which were applied to three records showing a tendency and a quarter of annual maximum daily precipitation that is related to the southern oscillation index. The selection of the best fitting was based on the standard error of fit and on the correlation coefficient between the data and the covariate.

Through the four numerical applications it is demonstrated the simplicity of the operating procedure and the contrast of results with those obtained in the references of origin of such data, allowed to verify empirically its accuracy. Based on the predictions obtained, its importance and usefulness is highlighted, in the probabilistic analyses of extreme non-stationary hydrological records.

—End of the English version—

-----\*-----

## LITERATURA CITADA

- Aissaoui-Fqayeh, I., S. El Adlouni, T. B. M. J. Ouarda, and A. St-Hilaire. 2009. Développement du modèle log-normal non-stationnaire et comparaison avec le modèle GEV non-stationnaire. *Hydrol. Sci. J.* 54: 1141–1156.
- Álvarez-Olguín, G., y C. A. Escalante-Sandoval. 2016. Análisis de frecuencias no estacionario de series de lluvia anual. *Tecnol. Cien. Agua VII*: 71–88.
- Asquith, W. H. 2011. Probability-Weighted Moments. *In: Distributional Analysis with L-moment Statistics using the R Environment for Statistical Computing*. Author edition (ISBN-13: 978-1463508418). Texas, U.S.A. pp: 77–86.
- Benson, M. A. 1962. Plotting positions and economics of engineering planning. *J. Hydraulics Div.* 88: 57–71.
- Campos-Aranda, D. F. 2003. Ajuste de Curvas. *In: Introducción a los Métodos Numéricos: Software en Basic y aplicaciones en Hidrología Superficial*. Editorial Universitaria Potosina. San Luis Potosí, S.L.P., México. pp. 93–127.
- Campos-Aranda, D. F. 2012. Técnicas asociadas al Análisis de Frecuencia de Crecientes en cuencas con desarrollo urbano. *Ing. Invest. Tecnol. XIII*: 385–392.
- Coles, S. 2001. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag London Limited. London, England. 208 p.
- Davis, P. J. 1972. Gamma Function and related functions. *In: Abramowitz M. and I. Stegun (eds). Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York, U.S.A. Ninth printing. pp: 253–296.
- El Adlouni, S., T. B. M. J. Ouarda, X. Zhang, R. Roy, and B. Bobée. 2007. Generalized maximum likelihood estimators for the nonstationary generalized extreme value model. *Water Resour. Res.* 43: 1–13.
- El Adlouni, S., B. Bobée, and T. B. M. J. Ouarda. 2008a. On the tails of extreme event distributions in hydrology. *J. Hydrol.* 355: 16–33.
- El Adlouni, S., and T. B. M. J. Ouarda. 2008b. Comparaison des méthodes d'estimation des paramètres du modèle GEV non stationnaire. *Revue Sciences L'Eau* 21: 35–50.
- Franks, S. W., C. J. White, and M. Gensen. 2015. Estimating extreme flood events—assumptions, uncertainty and error. *Proc. IAHS, No. 369*, pp: 31–36.
- Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas, and J. R. Wallis. 1979. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resour. Res.* 15: 1049–1054.
- Hosking, J. R. M., and J. R. Wallis. 1997. *Regional Frequency Analysis. An Approach Based on L-moments*. Cambridge University Press. Cambridge, England. 224 p.
- Jakob, D. 2013. Nonstationarity in extremes and engineering design. *In: AghaKouchak, A., D. Easterling, K. Hsu, S. Schubert, and S. Sorooshian (eds). Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. pp: 393–417.
- Katz, R. W. 2013. Statistical methods for nonstationary extremes. *In: AghaKouchak, A., D. Easterling, K. Hsu, S. Schubert, and S. Sorooshian (eds). Extremes in a Changing Climate*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. pp: 15–37.
- Khaliq, M. N., T. B. M. J. Ouarda, J. C. Ondo, P. Gachon, and B. Bobée. 2006. Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *J. Hydrol.* 329: 534–552.
- Kim, S., W. Nam, H. Ahn, T. Kim, and J. H. Heo. 2015. Comparison of nonstationary generalized logistic models based on Monte Carlo simulation. *Proc. IAHS, No. 371*, pp: 65–68.
- Kite, G. W. 1977. Comparison of frequency distributions. *In: Frequency and Risk Analyses in Hydrology*. Water Resources Publications. Fort Collins, Colorado, U.S.A. pp: 156–168.
- Leclerc, M., and T. B. M. J. Ouarda. 2007. Non-stationary regional flood frequency analysis at ungauged sites. *J. Hydrol.* 343: 254–265.
- López de la Cruz, J., y F. Francés. 2014. La variabilidad climática de baja frecuencia en la modelación no estacionaria de los regímenes de las crecidas en las regiones hidrológicas Sinaloa y Presidio-San Pedro. *Tecnol. Cienc. Agua* 5: 79–101.
- Machiwal, D., and M. K. Jha. 2012. Methods for time series analysis. *In: Hydrologic Time Series Analysis: Theory and Practice*. Springer. Dordrecht, The Netherlands. pp: 51–84.
- Martins, E. S., and J. R. Stedinger. 2000. Generalized maximum-likelihood GEV quantile estimators for hydrologic data. *Water Resour. Res.* 36: 737–744.
- McCuen, R. H., and W. O. Thomas. 1990. Flood frequency analysis techniques for urbanizing watersheds. *In: Symposium Proceedings on Urban Hydrology*. American Water Resources Association. Bethesda, Maryland, U.S.A. pp: 35–46.
- Meylan, P., A. C. Fabre, and A. Musy. 2012. *Predictive Hydrology. A Frequency Analysis Approach*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. 212 p.
- Mudersbach, C., and J. Jensen. 2010. An advanced statistical extreme value model for evaluating storm surge heights considering systematic records and sea level scenarios. *In: Proceedings of the 32<sup>nd</sup> Conference on Coastal Engineering*. Shanghai, China. pp: 23.
- Nadarajah, S. 2005. Extremes of daily rainfall in west central Florida. *Clim. Change* 69: 325–342.
- Ostle, B., and R. W. Mensing. 1975. Regression analysis. *In: Statistics in Research*. Iowa State University Press. Ames, Iowa, U.S.A. Third edition. pp: 165–236.
- Ouarda, T. B. M. J., and S. El Adlouni. 2011. Bayesian nonstationary frequency analysis of hydrological variables. *J. Amer. Water Resour. Assoc.* 47: 496–505.
- Pandey, G. R., and V. T. V. Nguyen. 1999. A comparative study of regression based methods in regional flood frequency analysis. *J. Hydrol.* 225: 92–101.
- Park, J. S., H. S. Kang, Y. S. Lee, and M. K. Kim. 2011. Changes in the extreme daily rainfall in South Korea. *Int. J. Climatol.* 31: 2290–2299.
- Rao, A. R., and K. H. Hamed. 2000. *Flood Frequency Analysis*. CRC Press. Boca Raton, Florida, U.S.A. 350 p.
- Sen, P. K. 1968. Estimates of the regression coefficient based on Kendall's tau. *J. Amer. Stat. Assoc.* 63: 1379–1389.
- Stedinger, J. R., R. M. Vogel, and E. Foufoula-Georgiou. 1993. Frequency analysis of extreme events. *In: Maidment, D. R. (ed). Handbook of Hydrology*. McGraw-Hill, Inc. New York, U.S.A. pp: 18.1–18.66.
- Teegavarapu, R. S. V. 2012. Precipitation variability and teleconnections. *In: Floods in a Changing Climate. Extreme Precipitation*. International Hydrology Series (UNESCO) and Cambridge University Press. Cambridge, United Kingdom. pp: 169–192.

Zelen, M., and N. C. Severo. 1972. Probability functions. *In*: Abramowitz; M. and I. Stegun (eds). Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications. New York, U.S.A. Ninth printing. pp: 925–995.