

# THE WEIBULL DISTRIBUTION TO DESCRIBE ABOVEGROUND BIOMASS OF *Lolium multiflorum* LAM., IN RELATION TO RATE OF NITROGEN APPLICATION

## LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL PARA DESCRIBIR LA BIOMASA AÉREA DE *Lolium multiflorum* LAM., EN RELACIÓN AL NIVEL DE APLICACIÓN DE NITRÓGENO

José Javier Gorgoso-Varela<sup>1</sup>, José Alberto Oliveira-Prendes<sup>2</sup>, Elías Afif-Khoury<sup>2</sup>, Pedro Palencia<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Unidade de Xestión Forestal Sostible (UXFS), Departamento de Enxeñaría Agroforestal, Universidade de Santiago de Compostela, Escola Politécnica Superior, Campus Universitario s/n, 27002 Lugo, Spain. <sup>2</sup>Department of Organisms and Systems Biology, Polytechnic School of Mieres, Oviedo University, Mieres 33600 Asturias, Spain. (palencia@uniovi.es).

### ABSTRACT

Characterization of forage biomass in pasture land is complicated by the temporal and spatial variability that result from variation in vegetation patch sizes. These factors along with topography, water location and distribution of fertilizer result in non-uniform grass. The aim of the study was to evaluate the use of the three-parameter Weibull distribution to describe aerial dry matter (DM) production in the first harvest of a mixture of three Italian ryegrass (*Lolium multiflorum* Lam.) cultivars (the tetraploid 'Jivet' and 'Barspirit', and the diploid 'Barprisma') in Asturias (N Spain). The trial was established in a randomized complete block design with three blocks of 100 m<sup>2</sup> (20 m x 5 m) and a fertilizer treatment with three levels (0, 40 and 80 kg N ha<sup>-1</sup>) assigned at random to each block. In 2010, 2011 and 2012, samples of vegetation (28-30) were collected at random from each treatment plot to enable modelling of aerial DM production. The null hypothesis that the distributions studied follow a Weibull distribution was tested. The three-parameter Weibull distribution was fitted by the method of Moments, and the goodness of fit was tested with the Kolmogorov-Smirnov test ( $\alpha=0.05$ ). The Weibull distribution function proved to be a flexible and simple model that enabled description of 100 % of the distributions.

**Key words:** productivity, nitrogen fertilization, density function, moments, Italian ryegrass.

### RESUMEN

Caracterizar la biomasa de forraje en pastos es complicado por la variabilidad temporal y espacial de su producción. Estos factores junto con la topografía, la ubicación del agua y la distribución del fertilizante resultan en lugares heterogéneos. El objetivo de este estudio fue evaluar el uso de la distribución Weibull de tres parámetros para describir la producción de materia seca (MS) aérea en la primera cosecha de una mezcla de tres variedades de ballico (raigrás) italiano (*Lolium multiflorum* Lam.) (los tetraploides 'Jivet' y 'Barspirit', y el diploide 'Barprisma') en Asturias (N de España). La prueba se estableció con un diseño en bloques completos al azar con tres bloques de 100 m<sup>2</sup> (20 m x 5 m) y un tratamiento de fertilización con tres niveles (0, 40 y 80 kg N ha<sup>-1</sup>) asignados al azar a cada bloque. En 2010, 2011 y 2012, se recolectaron al azar muestras de vegetación (28-30) de cada tratamiento para permitir modelar la producción de MS aérea. La hipótesis nula de que las distribuciones estudiadas siguen una distribución Weibull se evaluó. La distribución Weibull de tres parámetros se ajustó con el método Momentos y la bondad de ajuste se comprobó con la prueba Kolmogorov-Smirnov ( $\alpha=0.05$ ). La función de distribución Weibull resultó ser un modelo flexible y simple que permitió la descripción de 100 % de las distribuciones.

**Palabras clave:** productividad, fertilización nitrogenada, función de densidad, momentos de la distribución, ballico (raigrás) italiano.

### INTRODUCCIÓN

La caracterización de la biomasa de forraje en pastos es complicada por variabilidad temporal y espacial. Estos factores, junto con la

\* Author for correspondence ♦ Autor responsable.

Received: June, 2016. Approved: August, 2017.

Published as ARTICLE in *Agrociencia* 52: 67-75. 2018.

## INTRODUCTION

Characterization of forage biomass in pasture land is complicated by the temporal and spatial variability that result from variation in vegetation patch sizes. These factors, along with topography, water location and distribution of fertilizer, result in non-uniform grass for biomass production. Although a normal distribution is assumed when estimating forage biomass, there are several problems that result from this assumption. For example, cattle do not graze pastures uniformly, but graze selectively in a manner that creates patches, some of which are more heavily grazed than others (Senft *et al.*, 1987). The heterogeneity of plant biomass is related to the level of grazing intensity as this affects the biomass frequency distribution, which is often skewed to the right when plants are grazed (Shiyomi *et al.*, 1984; Shiyomi *et al.*, 1998).

Skewed distributions can be modelled by other distributions, such as the beta, log-normal, Johnson's  $S_B$  or Gamma distribution. The Gamma distribution was used by Shiyomi *et al.* (1998) and Tsutsumi *et al.* (2002) to model biomass production in pasture, but most of these distributions have inherent limitations when used to model forage biomass. For example, most of these distributions do not exist in a closed form, so that they are difficult to integrate, and some require advance knowledge of the minimum and maximum values for parameter estimation and rescaling estimated values (Remington *et al.*, 1994).

The Weibull distribution can be used to overcome these difficulties because of its flexibility and simplicity. It is used to describe a wide variety of biomass distributions in grazed pasture (Remington *et al.*, 1994) and in early first harvest of short-term forage crops in Asturias (N Spain) fertilized with three N treatments (Gorgoso *et al.*, 2012). In other agronomic studies about rot incidence of strawberry also was applied successfully (East, 2011). Remington *et al.* (1992) used the Weibull distribution to describe the amounts of aerial dry matter and maximum plant heights of blue grama (*Bouteloua gracilis* (H.B.K.) Lagg. ex Steud) and buffalograss (*Buchloe dactyloides* (Nutt.) Engelm).

The objective of this study was to evaluate the use of the three-parameter Weibull distribution to describe the frequency distribution of aerial dry matter production in the first harvest of *Lolium*

topografía, la ubicación del agua y la distribución del fertilizante, resultan en pasto heterogéneo para la producción de biomasa. Aunque se asume una distribución normal cuando se estima la biomasa de forraje, hay varios problemas que resultan de esta suposición. Por ejemplo, el ganado no pastorea de manera uniforme, en los pastos sino que selectivamente por lo cual genera manchas, algunas de las cuales están pastadas más fuerte que otras (Senft *et al.*, 1987). La heterogeneidad de la biomasa vegetal se relaciona con la intensidad del pastoreo, ya que esto afecta la distribución de frecuencias de la biomasa, que a menudo está sesgada hacia la derecha cuando las plantas se pastorean (Shiyomi *et al.*, 1984; Shiyomi *et al.*, 1998).

Las distribuciones sesgadas pueden modelarse por otras distribuciones, como las beta, log-normal, Johnson  $S_B$  o Gamma. Shiyomi *et al.* (1998) y Tsutsumi *et al.* (2002) usaron la distribución Gamma para modelar la producción de biomasa en pastizal, pero la mayoría de estas distribuciones tienen limitaciones inherentes cuando se usan para modelar la biomasa de forraje. Por ejemplo, la mayoría de estas distribuciones no existen de forma cerrada, por lo que son difíciles de integrar, y algunas requieren conocimiento previo de los valores mínimo y máximo para estimar los parámetros y reescalar los valores estimados (Remington *et al.*, 1994).

La distribución Weibull puede usarse para vencer estas dificultades por su flexibilidad y simplicidad. Se usa para describir una variedad amplia de distribuciones de biomasa en pastizal pastado (Remington *et al.*, 1994) y en la primera cosecha temprana de cultivos de forraje de corto plazo en Asturias (N de España) fertilizados con tres tratamientos de N (Gorgoso *et al.*, 2012). En otros estudios agronómicos sobre la incidencia de pudrición en fresa, también se aplicó con éxito (East, 2011). Remington *et al.* (1992) también usaron la distribución Weibull para describir las cantidades de materia seca aérea y las máximas alturas de plantas de grama azul (*Bouteloua gracilis* (H.B.K.) Lagg. ex Steud) y pasto búfalo (*Buchloe dactyloides* (Nutt.) Engelm).

El objetivo de este estudio fue evaluar el uso de la distribución Weibull de tres parámetros para describir la distribución de frecuencias de la producción de materia seca aérea en la primera cosecha de *Lolium multiflorum* Lam., fertilizado con distintas dosis de N. La hipótesis nula fue que las distribuciones

*multiflorum* Lam., fertilized with different N doses. The null hypothesis was that the distributions studied follow a Weibull distribution was tested.

## MATERIALS AND METHODS

### Trial plots and biomass analysis

Forty kg ha<sup>-1</sup> of a mixture of three Italian ryegrass cultivars, *Lolium multiflorum westerwoldicum* 'Jivet' and 'Barspirit' (tetraploids) and *Lolium multiflorum* 'Barprisma', (diploid) were sown manually in three 100 m<sup>2</sup> (20 m x 5 m) plots at the end of October of 2009, 2010 and 2011. The mixture comprised 50, 20 and 30 % (by weight) of the three cultivars, respectively. The plots were in Carreño, Asturias, Spain. The treatment was the application of three doses of N fertilizer, and the amounts of N supplied with the doses were 0, 40 and 80 kg ha<sup>-1</sup>. The fertilizer was applied manually in March 2010, 2011 and 2012, as calcium ammonium nitrate (27 % N, 3 % Mg O and 7,5 % Ca O).

In each N treatment, between 28 and 30 forage samples were collected at random, within a square metallic frame of surface area 0.25 m<sup>2</sup>. The different plants within the frame were cut to soil level and the samples were weighed in the field. Aliquots (100 g) of each sample were oven-dried at 70 °C for 48 h to determine aerial dry matter production.

### Modelling the aerial dry matter

#### The Weibull distribution

The three-parameter Weibull distribution were obtained by integrating the Weibull density function; both have the following expression for a random variable  $x$ :

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \cdot dx = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \quad (1)$$

where  $F(x)$  is the cumulative relative frequency of biomass production equal to or smaller than random variable  $x$ ,  $a$  is the situation parameter,  $b$  is the scale parameter and  $c$  is the shape parameter.

In this study, biomass production intervals of 30 g m<sup>-2</sup> were established for the fits of the Weibull function for all treatments. The values of the three parameters are equal to or higher than zero and the values allow the function to have different shapes.

estudiadas siguen una distribución Weibull se puso a prueba.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Parcelas de estudio y análisis de la biomasa

Manualmente se sembraron 40 kg ha<sup>-1</sup> de una mezcla de tres variedades de ballico italiano, *Lolium multiflorum westerwoldicum* 'Jivet' y 'Barspirit' (tetraploides) y *Lolium multiflorum* 'Barprisma' (diploide), en tres parcelas de 100 m<sup>2</sup> (20 m x 5 m) a finales de octubre en 2009, 2010 y 2011. La mezcla tuvo 50, 20 y 30 % (por peso) de las tres variedades, respectivamente. Las parcelas se establecieron en Carreño, Asturias, España. El tratamiento fue la aplicación de tres dosis de fertilizante de N, y las cantidades de N proporcionadas por las dosis fueron 0, 40 y 80 kg ha<sup>-1</sup>. El fertilizante se aplicó manualmente en marzo de 2010, 2011 y 2012, como nitrato de amonio de calcio (27 % N, 3 % Mg O y 7,5 % Ca O).

En cada tratamiento de N se recolectaron 28 a 30 muestras al azar, dentro de un marco metálico cuadrado con un área superficial de 0.25 m<sup>2</sup>. Las distintas plantas dentro del marco se cortaron al nivel del suelo y las muestras se pesaron en el campo. Alícuotas (100 g) de cada muestra se secaron en horno a 70 °C por 48 h para determinar la producción de materia seca aérea.

### Modelar la materia seca aérea

#### La distribución Weibull

La distribución Weibull de tres parámetros se obtuvo al integrar la función de densidad de Weibull; ambos tienen la siguiente expresión para una variable aleatoria  $x$ :

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \cdot dx = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \quad (1)$$

donde  $F(x)$  es la frecuencia acumulativa relativa de producción de biomasa igual o menor a la variable  $x$ ,  $a$  es el parámetro de situación,  $b$  es el parámetro de escala y  $c$  es el parámetro de forma.

En este estudio, se establecieron intervalos de producción de biomasa de 30 g m<sup>-2</sup> para los ajustes de la función de Weibull para todos los tratamientos. Los valores de los tres parámetros son iguales o mayores de cero y los valores permiten que la función tenga distintas formas.

**Weibull distribution fits**

The Weibull distribution parameters were estimated by the method of moments because is more suitable than the maximum likelihood method for a number of samples less or equal to 30 (Grender *et al.*, 1990).

The method of moments is based on the relationship between the Weibull distribution parameters (*a*, *b* and *c*) and the first and second moments of the aerial dry matter (DM) distribution (mean value of aerial dry matter and variance, respectively):

$$b = \frac{\bar{x} - a}{\Gamma\left[1 + \frac{1}{c}\right]} \tag{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{x} - a)^2}{\Gamma^2\left[1 + \frac{1}{c}\right]} \cdot \left( \Gamma\left[1 + \frac{2}{c}\right] - \Gamma^2\left[1 + \frac{1}{c}\right] \right) \tag{3}$$

where  $\bar{x}$  is the mean aerial DM of the distribution,  $\sigma^2$  the variance and  $\Gamma(i)$  is the Gamma function for each point ( $x=i$ ). Equation (3) was resolved by an iterative procedure with the bisection method (Gerald and Wheatley, 1989) in SAS/STAT™ (SAS Institute Inc., 2001).

Location parameter *a* of the Weibull distribution was considered in all cases as the aerial DM in the sample with the minimum value in each treatment.

**Goodness of fits**

The Shapiro-Wilk test was used to test the normality of data in each treatment, at an error probability level of 5 %.

The Kolmogorov-Smirnov (K-S) test was used to determine the goodness of fit of the Weibull distribution in each treatment. This test compares the cumulative estimated frequency  $F_o(x_j)$  with the cumulative observed frequency  $F_n(x_j)$ . The statistic  $D_n$  of the KS test for a given cumulative distribution was used to evaluate and compare the results:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_o(x)|$$

where  $\sup_x$  is the supremum of the set of distances. Thus, this value was calculated as follows (Cao, 2004):

**Ajustes de la distribución Weibull**

Los parámetros de la distribución Weibull se estimaron por el método de momentos porque es más adecuado que la máxima verosimilitud para un número de muestras menor o igual a 30 (Grender *et al.*, 1990).

El método de momentos se basa en la relación entre los parámetros de distribución Weibull (*a*, *b* y *c*) y los primeros y segundos momentos de la distribución de la materia seca aérea (MS) (valor medio de materia seca aérea y varianza, respectivamente):

$$b = \frac{\bar{x} - a}{\Gamma\left[1 + \frac{1}{c}\right]} \tag{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\bar{x} - a)^2}{\Gamma^2\left[1 + \frac{1}{c}\right]} \cdot \left( \Gamma\left[1 + \frac{2}{c}\right] - \Gamma^2\left[1 + \frac{1}{c}\right] \right) \tag{3}$$

donde  $\bar{x}$  es la media de MS aérea de la distribución,  $\sigma^2$  la varianza y  $\Gamma(i)$  es la función Gamma para cada punto ( $x=i$ ). La ecuación [3] se resolvió con un procedimiento iterativo con el método de bisección (Gerald y Wheatley, 1989) en SAS/STAT™ (SAS Institute Inc., 2001).

El parámetro de ubicación *a* de la distribución Weibull se consideró en todos los casos como la MS aérea en la muestra con el valor mínimo en cada tratamiento.

**Bondad de ajustes**

La prueba Shapiro-Wilk se usó para probar la normalidad de los datos en cada tratamiento, con un 5 % de probabilidad de error.

La prueba Kolmogorov-Smirnov (K-S) se usó para determinar la bondad de ajuste de la distribución Weibull en cada tratamiento. Esta prueba compara la frecuencia estimada acumulativa  $F_o(x_j)$  con la frecuencia observada acumulativa  $F_n(x_j)$ . El estadístico  $D_n$  de la prueba KS para una distribución acumulativa específica se usó para evaluar y comparar los resultados:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_o(x)|$$

donde  $\sup_x$  es el máximo en la colección de distancias. Por ende, este valor se calculó de la siguiente forma (Cao, 2004):

$$D_n = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n_i} \left[ F_n(x_i) - F_0(x_j) \right], \max_{1 \leq i \leq n_i} \left[ F_0(x_j) - F_n(x_{i-1}) \right] \right\} \quad (4)$$

$$D_n = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n_i} \left[ F_n(x_i) - F_0(x_j) \right], \max_{1 \leq i \leq n_i} \left[ F_0(x_j) - F_n(x_{i-1}) \right] \right\} \quad (4)$$

Biomass production intervals of 30 g m<sup>-2</sup> were chosen in all fits. The following expression was used to compare the value obtained with the critical value proposed by Miller (1956), and error probability was established at 5 %:

$$D_{n,\alpha} = \sqrt{\frac{-Ln\left(\frac{1}{2} \cdot \alpha\right)}{2 \cdot n}}$$

where *Ln* is the natural logarithm,  $\alpha$  is the significance level and *n* is the number of samples considered in each treatment. When  $D_n > D_{n,\alpha}$ , the test rejects the null hypothesis that the distribution follows a Weibull distribution.

### RESULTS AND DISCUSSION

The null hypothesis of a normal biomass distribution was not rejected in seven out of nine cases (only the samples of the distribution Lm\_2012\_0 and Lm\_2012\_40 cannot be considered normal). (Table 1).

Absolute skewness ranged from a low of -0.718 in the Lm\_2012\_0 distribution and a maximum

Intervalos de producción de biomasa de 30 g m<sup>-2</sup> se eligieron en todos los ajustes. La siguiente expresión se utilizó para comparar el valor obtenido con el valor crítico propuesto por Miller (1956), y el error de probabilidad se determinó a 5%:

$$D_{n,\alpha} = \sqrt{\frac{-Ln\left(\frac{1}{2} \cdot \alpha\right)}{2 \cdot n}}$$

donde *Ln* es el logaritmo natural,  $\alpha$  es el nivel de significación y *n* es el número de muestras consideradas en cada tratamiento. Cuando  $D_n > D_{n,\alpha}$ , la prueba rechaza la hipótesis nula de que la distribución sigue una distribución de Weibull.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La hipótesis nula de distribución normal de biomasa no se rechazó en siete de nueve casos (sólo las muestras de la distribución Lm\_2012\_0 y Lm\_2012\_40 no se consideraron normales) (Cuadro 1).

El sesgo absoluto tuvo un intervalo de -0.718, en la distribución de Lm\_2012\_0, a uno máximo

**Table 1. Shapiro-Wilk test statistic and skewness and kurtosis coefficients for the observed distributions.**

**Cuadro 1. Prueba estadística Shapiro-Wilk y coeficientes de sesgo y curtosis para las distribuciones observadas.**

Distribution	Shapiro-Wilk test statistic	Skewness	Kurtosis
Lm_2010_0	0.953	0.404	-0.683
Lm_2010_40	0.980	-0.295	-0.437
Lm_2010_80	0.972	0.534	0.363
Lm_2011_0	0.943	-0.511	-0.819
Lm_2011_40	0.947	-0.147	-1.272
Lm_2011_80	0.960	0.044	-1.175
Lm_2012_0	0.905*	-0.718	-0.691
Lm_2012_40	0.921*	-0.115	-1.485
Lm_2012_80	0.938	-0.031	-1.378

\*Significant at  $\alpha=0.05$  ♦ Significancia a  $\alpha=0.05$ .

of 0.534 in Lm\_2010\_80 (Table 1). The Weibull function also enables distributions to be represented with different values of the kurtosis coefficient, which is indicative of the shape of the function. Estimates of the Weibull parameters for the levels of fertilizer are indicated (Table 2). Location parameter *a* and scale parameter *b* units correspond to the aerial DM units (g m<sup>-2</sup>); the sum of both parameters (*a* + *b*) corresponds to the 63<sup>rd</sup> percentile of the Weibull distribution (Johnson and Kotz, 1971), and the shape parameter *c* is unity.

The results of the Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit ( $\alpha=0.05$ ) (Table 3) showed that there was not enough evidence to reject the null hypothesis that the 9 distributions of biomass follow a three parameter Weibull distribution.

The Weibull distributions indicated an increase in the 63<sup>rd</sup> percentile of aerial dry matter (*a* + *b*), with a higher level of fertilizer in all cases in concordance with the mean values obtained in each treatment

de 0.534, en Lm\_2010\_80 (Cuadro 1). La función de Weibull también permite que las distribuciones se representen con distintos valores del coeficiente de curtosis, que es indicador de la forma de la función. Las estimaciones de los parámetros de Weibull para los niveles de fertilizante se muestran en el Cuadro 2. El parámetro de ubicación *a* y las unidades del parámetro de escala *b* corresponden a las unidades de materia seca aérea (g m<sup>-2</sup>); la suma de ambos parámetros (*a* + *b*) corresponde al percentil 63 de la distribución Weibull (Johnson y Kotz, 1971), y el parámetro de forma *c* es unidad.

Los resultados de la prueba de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste ( $\alpha=0.05$ ) (Cuadro 3) mostraron que no había suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que las 9 distribuciones de biomasa siguen una distribución Weibull de tres parámetros.

Las distribuciones de Weibull señalaron aumento en el percentil 63 de masa seca aérea (*a* + *b*), con

**Table 2. Weibull parameters (*a*, *b* and *c*) for the estimated biomass (g m<sup>-2</sup>) and different levels of N fertilizer.**

**Cuadro 2. Parámetros de Weibull (*a*, *b* y *c*) para la biomasa estimada (g m<sup>-2</sup>) y distintos niveles de fertilizante de N.**

Year	N applied (kg ha <sup>-1</sup> )	Code	a	b	a + b	c
2010	0	Lm_2010_0	173.2	202.6	375.8	1.63
	40	Lm_2010_40	257.5	312.6	570.1	2.47
	80	Lm_2010_80	347.5	213.4	560.9	1.65
2011	0	Lm_2011_0	200.0	265.5	465.5	2.17
	40	Lm_2011_40	550.0	151.2	701.2	1.73
	80	Lm_2011_80	830.0	149.3	979.3	1.75
2012	0	Lm_2012_0	550.0	250.8	800.8	2.23
	40	Lm_2012_40	950.0	151.2	1101.2	1.73
	80	Lm_2012_80	1230.0	143.3	1373.3	1.67

**Table 3. Results of the Kolmogorov-Smirnov test (KS) for the nine distributions.**

**Cuadro 3. Resultados de la prueba Kolmogorov-Smirnov (KS) para las nueve distribuciones.**

Distribution	Data	<i>D<sub>n</sub></i>	<i>D<sub>n,α</sub></i>	Distribution	Data	<i>D<sub>n</sub></i>	<i>D<sub>n,α</sub></i>
Lm_2010_0	28	0.140	0.257	Lm_2011_80	30	0.150	0.248
Lm_2010_40	28	0.130	0.257	Lm_2012_0	30	0.179	0.248
Lm_2010_80	29	0.139	0.252	Lm_2012_40	30	0.188	0.248
Lm_2011_0	30	0.179	0.248	Lm_2012_80	30	0.151	0.248
Lm_2011_40	30	0.181	0.248				

*D<sub>n</sub>*: KS statistic; *D<sub>n,α</sub>*: critical value of Miller (1956) at  $\alpha=0.05$ . ♦ *D<sub>n</sub>*: estadístico KS; *D<sub>n,α</sub>*: valor crítico de Miller (1956) a  $\alpha=0.05$ .

for aerial dry matter, except in Lm\_2010\_80, where the 63<sup>rd</sup> percentile is lower than Lm\_2010\_40, for which the value of parameter  $c$  was maximal (2.47). Situation parameter  $a$  also was related to the dose of fertilizer. Shape parameter  $c$  was always lower than 3.6 and all the Weibull distributions were skewed to the right. The nine observed distributions of biomass production ( $\text{g m}^{-2}$ ) in relative frequencies in each interval considered ( $30 \text{ g m}^{-2}$ ) and the distributions described by the three parameter Weibull function are shown (Figure 1).

In relation to the modeling the aerial dry matter (DM), it is possible that the observed aerial DM production follows other more flexible distributions than the normal due to the asymmetry of the distributions. Mielke (1986) stated that if the absolute value of the skewness exceeds 0.01, normality cannot be reliably assumed in constructing confidence intervals or in hypothesis testing. Using this as a guideline, it can be seen that all of the frequency distributions were skewed. The results of the Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit ( $\alpha=0.05$ ) are consistent with those obtained by Remington *et al.* (1992) in a comparison of the results of the Weibull distribution with the normal distribution for describing amounts of aerial DM and maximum plant heights of blue grama (*Bouteloua gracilis*) and buffalo grass (*Bouteloua dactyloides*).

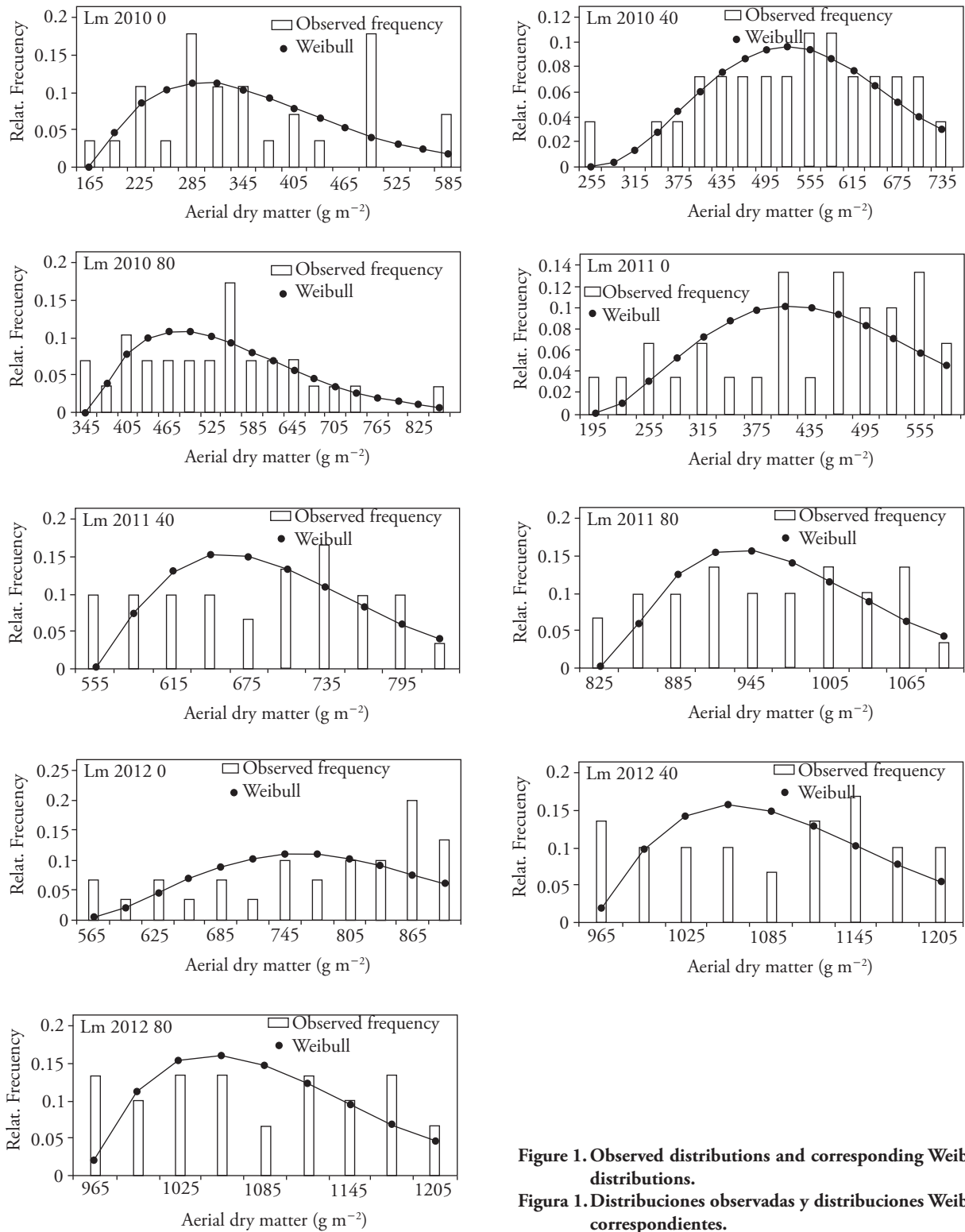
In our study, the normal distribution described only 50 % of the distributions of biomass and 0 % of the maximum height data using the Anderson-Darling test statistic. However, the Weibull distribution was able to describe all the observed biomass and maximum height data. Remington *et al.* (1994) also used the Weibull distribution to model the distribution of *Agropyron cristatum* biomass as 12 different distributions depending on the intensity of grazed pasture (no grazing, lightly grazed, moderately grazed and heavily grazed) in each of three months (June, August and October). In this case, the Weibull distribution was also capable of describing 100% of the observed biomass distributions, and the Kolmogorov-Smirnov test ( $\alpha=5 \%$ ) was used to test the goodness of fit for 25 % (three distributions) that did not pass the Anderson-Darling test for normality ( $\alpha=5 \%$ ).

In future studies including more treatments, it would be possible to relate the three parameters of the Weibull function to the main variables that affect aerial DM (fertilizer dose, soil depth, slope,

un nivel mayor de fertilizante en todos los casos en concordancia con los valores promedio obtenidos en cada tratamiento para materia seca aérea, excepto en Lm\_2010\_80, donde el percentil 63 es menor que en Lm\_2010\_40, para lo cual el valor del parámetro  $c$  fue máximo (2.47). El parámetro de situación  $a$  también se relacionó con la dosis de fertilizante. El parámetro de forma  $c$  siempre fue menor de 3.6 y todas las distribuciones Weibull se sesgaron hacia la derecha. Las nueve distribuciones observadas de producción de biomasa ( $\text{g m}^{-2}$ ) en frecuencias relativas en cada intervalo considerado ( $30 \text{ g m}^{-2}$ ) y las distribuciones descritas por la función de Weibull de tres parámetros se muestran (Figura 1).

En relación con la modelización de la materia seca (MS) aérea, es posible que la producción de MS aérea siga otras distribuciones más flexibles que la normal debido a la asimetría de las distribuciones. Mielke (1986) señaló que si el valor absoluto de sesgo excede 0.01, la normalidad no se puede suponer con confianza para construir intervalos de confianza o para probar la hipótesis. Al usar lo último como directriz, se ve que todas las distribuciones de frecuencia estaban sesgadas. Los resultados de la prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste ( $\alpha=0.05$ ) son consistentes con los obtenidos por Remington *et al.* (1992) en una comparación de los resultados de la distribución Weibull con la distribución normal para describir cantidades de MS aérea y alturas máximas de plantas de navajita azul (*Bouteloua gracilis*) y pasto búfalo (*Bouteloua dactyloides*).

En nuestro estudio, la distribución normal describir sólo 50 % de las distribuciones de biomasa y 0 % de los datos de altura máxima usando el estadístico de la prueba de Anderson-Darling. Sin embargo, la distribución Weibull pudo describir toda la biomasa observada y los datos de altura máxima. Remington *et al.* (1994) también utilizaron la distribución Weibull para modelizar la distribución de biomasa de *Agropyron cristatum* como 12 distribuciones distintas dependiendo de la intensidad del pastoreo en el pastizal (sin pastar, levemente pastado, moderadamente pastado y fuertemente pastado), en cada uno de los tres meses (junio, agosto y octubre). En este caso, la distribución Weibull también pudo describir 100 % de las distribuciones de biomasa observadas, y la prueba Kolmogorov-Smirnov ( $\alpha=5 \%$ ) se usó para comprobar la bondad de ajuste para 25 % (tres distribuciones) que no pasaron la prueba de Anderson-Darling de normalidad ( $\alpha=5 \%$ ).



**Figure 1. Observed distributions and corresponding Weibull distributions.**  
**Figura 1. Distribuciones observadas y distribuciones Weibull correspondientes.**



climate variables) and to use regression models to predict the Weibull parameters and thus the biomass distributions. When the function is fitted by the method of moments, these variables can be related to the first and the second moments of the distributions (mean and variance, respectively).

## CONCLUSIONS

The Weibull distribution is highly flexible for describing the aerial dry matter distributions of early first harvest of *Lolium multiflorum* in Asturias. The skewness and kurtosis of the distributions differed as a result of the different amounts of N supplied, site and meteorological conditions and sampling locations. The parameters of the Weibull distribution can be easily related to the values of the described variable (aerial dry matter) and are simple to interpret.

## LITERATURE CITED

- Cao Q. 2004. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. *For. Sci.* 50: 682-685.
- East A. R. 2011. Accelerated libraries to inform batch sale scheduling and reduce postharvest losses of seasonal fresh produce. *Biosyst. Eng.* 109: 1-9.
- Gerald C. F., and P. Wheatley. 1989. *Applied Numerical Analysis* (7<sup>th</sup> edition). Addison-Wesley publishing Co, Reading, Massachusetts, USA. 624 p.
- Gorgoso J. J., J.A. Oliveira, E. Afif, and P. Palencia. 2012. Use of Weibull distribution in early first harvest aboveground biomass of short-term forage crops in Asturias (N Spain). 12<sup>th</sup> Congress of the European Society for Agronomy, Helsinki (Finland), Aug 20-24. pp: 292-293.
- Greider J. M., T. R. Dell, and R. M. Reich. 1990. Theory and derivation for Weibull parameter probability weighted Moments estimators. Res. Pap. SO-260. New Orleans, Louisiana: USDA, Forest Serv., Southern Forest Exp. Sta.
- Johnson N. L., and S. Kotz. 1971. *Continuous Univariate Distributions*. Vol. 1. John Wiley and Sons. New York, USA, 503 p.
- Mielke P. W. Jr. 1986. Nonparametric statistical analysis: some metric alternatives. *J. Stat. Plan. Inference* 13: 377-387.
- Miller L. H. 1956. Tables of percentage points of Kolmogorov statistic. *J. Amer. Statist. Assoc.* 51: 111-121.
- Remington K. K., C. D. Bonham, and R. M. Reich. 1992. Blue grama-buffalograss response to grazing: A Weibull distribution. *J. Range. Manage.* 45: 272-276.

En estudios futuros que incluyan más tratamientos, sería posible relacionar los tres parámetros de la función de Weibull a las variables principales que afectan la MS aérea (dosis de fertilizante, profundidad del suelo, pendiente, variables de clima) y usar modelos de regresión para predecir los parámetros de Weibull y así las distribuciones de biomasa. Cuando la función se ajusta por el método de momentos, estas variables se pueden relacionar con los momentos primero y segundo de las distribuciones (media y varianza, respectivamente).

## CONCLUSIONES

La distribución Weibull es altamente flexible para describir las distribuciones de materia seca aérea de la primera cosecha temprana de *Lolium multiflorum* en Asturias. El sesgo y la curtosis de las distribuciones difirieron como resultado de las distintas cantidades de N suministradas, el sitio y las condiciones meteorológicas y lugares de muestreo. Los parámetros de la distribución Weibull se pueden relacionar fácilmente con los valores de la variable descrita (materia seca aérea) y son simples de interpretar.

—Fin de la versión en Español—



- Remington K. K., C. D. Bonham, and R. M. Reich. 1994. Modeling the distribution of *Agropyron cristatum* biomass in a grazed pasture using the Weibull distribution. *J. Jpn. Grassl. Sci.* 40: 190-197.
- SAS Institute Inc. 2001. *SAS/STAT™ User's Guide*, Version 8.2. Cary, North Carolina.
- Senft R. L., M. B. Coughenour, D. W. Bailey, L. R. Rittenhouse, O. E. Sala, and D. M. Swift. 1987. Large herbivore foraging and ecological hierarchies. *Bioscience* 37: 789-799.
- Shiyomi M., T. Akiyama, and S. Takahashi. 1984. A spatial pattern model of plant biomass in grazing pasture II. *J. Jpn. Grassl. Sci.* 30: 40-48.
- Shiyomi M., M. Okada, S. Takahashi, and Y. Tang. 1998. Spatial pattern changes in aboveground plant biomass in a grazing pasture. *Ecol. Res.* 13: 313-322.
- Tsutsumi M., M. Shiyomi, S. Sato, and K. Sugawara. 2002. Use of Gamma distribution in aboveground biomass of plant species in grazing pasture. *Grassl. Sci.* 47: 615-618.