

ÍNDICE DE SITIO CON POLIMORFISMO COMPLEJO PARA MASAS FORESTALES DE DURANGO, MÉXICO

SITE INDEX WITH COMPLEX POLYMORPHISM OF FOREST STANDS IN DURANGO, MÉXICO

Gerónimo **Quiñonez-Barraza**¹, Héctor M. **De los Santos-Posadas**^{1*}, Francisco **Cruz-Cobos**²,
Alejandro **Velázquez-Martínez**¹, Gregorio **Ángeles-Pérez**¹, Gustavo **Ramírez-Valverde**³

¹Forestal, ²Estadística. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. 56230. Montecillo, Estado de México. ³Instituto Tecnológico de El Salto. Mesa del Tecnológico s/n. 34942. El Salto, Durango, México. (hmsantos@colpos.mx).

RESUMEN

La modelación del crecimiento de la altura dominante y el índice de sitio constituye una herramienta valiosa para clasificar la productividad de los terrenos forestales y definir estrategias de manejo forestal; la calidad de estación es un criterio para definir la programación de las intervenciones silvícolas. La derivación de una ecuación dinámica se presenta a partir del modelo base de Chapman-Richards, considerando el parámetro de la asíntota y el de la tasa de cambio como una función de la calidad de estación. La ecuación dinámica obtenida tiene polimorfismo complejo y múltiples asíntotas y fue ajustada para *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla* y *P. ayacahuite* juntos y por especie con variables indicadoras, y se comparó con dos ecuaciones GADA, con el mismo número de parámetros. Éstas están basadas en los modelos de Chapman Richards y Korf, los cuales han sido empleados en la modelación de altura dominante e índice de sitio. La comparación indicó que la ecuación derivada presentó mejor parsimonia en la expresión algebraica que describe la productividad del sitio y consideró la variabilidad de la potencialidad del sitio como una función de la asíntota. La ecuación dinámica puede usarse para predecir el crecimiento en altura dominante e índice de sitio para las masas mezcladas del área de estudio, con tasas de crecimiento similares para *Pinus durangensis*, *P. ayacahuite* y *P. arizonica*, lo cual responde al grado de asociación entre estas especies; *Pinus teocote* y *P. leiophylla* presentan las tasas menores de crecimiento.

Palabras clave: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, GADA.

ABSTRACT

Modeling of dominant height growth and site index is a valuable tool for classifying productivity of forest lands and for defining forest management strategies; station quality is a criterion for defining the programming of forest interventions. The derivation of a dynamic equation is presented from the base model of Chapman-Richards, considering the parameter of the asymptote and of the exchange rate as a function of site quality. The dynamic equation obtained has complex polymorphism and multiple asymptotes, and was fitted for *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla* and *P. ayacahuite* as a group and by species with dummy variables, and was compared with two GADA equations, with the same number of parameters. These are based on the models of Chapman Richards and Korf, which have been used in the modeling of dominant height and site index. The comparison indicated that the derived equation presented better parsimony in the algebraic expression that describes the productivity of the site and considered the variability of the potential of the site as a function of the asymptote. The dynamic equation can be used to predict dominant height growth and site index for the mixed stands of the study area, with similar growth rates for *Pinus durangensis*, *P. ayacahuite* and *P. arizonica*, that responds to the degree of association among these species; *Pinus teocote* and *P. leiophylla* present the lowest growth rates.

Key words: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, GADA.

INTRODUCTION

Precise estimations of productivity are a key element in forest management, as they contribute to the determination of the harvest,

* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: noviembre, 2014. Aprobado: marzo, 2015.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 49: 439-454. 2015.

INTRODUCCIÓN

Las estimaciones precisas de la productividad constituyen un elemento clave en el manejo forestal, ya que contribuyen a determinar la cosecha, el turno y la periodicidad de las intervenciones silvícolas (Torres-Rojo y Valles-Gándara, 2007; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). La productividad forestal es un concepto biológicamente complejo y que en masas forestales se estima indirectamente con el uso de modelos de crecimiento en altura dominante (Martín-Benito *et al.*, 2008). El crecimiento de altura dominante de un rodal monoespecífico y coetáneo es poco afectado por la densidad y seguirá un patrón determinado que además tiene buena correlación con la producción volumétrica (Clutter *et al.*, 1983). Para clasificar a los rodales según su productividad, denominada comúnmente calidad de estación o calidad de sitio, se utiliza el patrón de crecimiento de altura dominante referido a una altura dominante esperada a cierta edad. A esta definición “localizada” del crecimiento de la altura dominante se le denomina índice de sitio (Vanclay, 1994; Martín-Benito *et al.*, 2008). Una caracterización eficaz de la calidad de sitio contribuye al manejo forestal sustentable, facilita la identificación y clasificación de la productividad del sitio, así como a la actualización y proyección de inventarios forestales y a la planeación de las intervenciones silvícolas (Cieszewski *et al.*, 2000a; Vargas-Larreta *et al.*, 2010).

Los modelos de índice de sitio requieren de un modelo de crecimiento, el cual se reestructura para reflejar la condición específica del crecimiento de la altura dominante. Bailey y Clutter (1974) formalizaron una técnica conocida como el Método de Diferencias Algebraicas para derivar ecuaciones dinámicas a partir de modelos de crecimiento (Algebraic Difference Approach o ADA), que involucra esencialmente la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del sitio. Este enfoque permite construir modelos invariantes de la edad base e invariantes del camino de simulación. La limitación principal de la metodología ADA es que los modelos derivados son anamórficos o polimórficos, es decir, la hipótesis específica sólo permite variar la potencialidad máxima o las tasas de crecimiento, pero no pueden variar ambas (Bailey y Clutter, 1974; Cieszewski y Bailey, 2000). El método de las ecuaciones en Diferencia Algebraica Generalizada (GADA

the rotation and periodicity of forestry interventions (Torres-Rojo y Valles-Gándara, 2007; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). Forest productivity is a biologically complex concept and is estimated in forest masses indirectly with the use of models of dominant height growth (Martín-Benito *et al.*, 2008). Dominant height growth of a monospecific and even-aged stand is little affected by density and will follow a determined pattern which also has a good correlation with volumetric production (Clutter *et al.*, 1983). To classify the stands according to their productivity, commonly known as site quality, the dominant height growth pattern is used, referring to a dominant height expected at a certain age. In this “localized” definition of dominant height growth, it is called site index (Vanclay, 1994; Martín-Benito *et al.*, 2008). An effective characterization of site quality contributes to sustainable forest management, facilitates the identification and classification of the productivity of the site, and the actualization and projection of forest inventories and planning of forest interventions (Cieszewski *et al.*, 2000a; Vargas-Larreta *et al.*, 2010).

Site index models require a growth model, which is restructured to reflect the specific condition of the dominant height growth. Bailey and Clutter (1974) formalized a technique known as the Algebraic Difference Approach (ADA) for deriving dynamic equations from growth models, which involves essentially the substitution of a parameter of the base model to be expressed as a function of the site. This approach makes it possible to construct invariant models, base-age invariance and simulation path invariance. The principal limitation of the ADA methodology is that the derived models are anamorphic or polymorphic, that is, the specific hypothesis only permits the variation of maximum potentiality or growth rates, but cannot vary both (Bailey and Clutter, 1974; Cieszewski and Bailey, 2000). The method of the equations in Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) considers that the base equation can be expanded to permit that more than one parameter depends on the site quality (Cieszewski, 2001). With the GADA methodology it is possible to obtain families of curves which are polymorphic and with multiple asymptotes, and preserve the logical properties base-age invariance and simulation path invariance (Cieszewski, 2003).

The principal challenge in the development of dynamic equations with the GADA approach

por sus siglas en inglés), considera que la ecuación base puede ser expandida para permitir que más de un parámetro dependa de la calidad de estación (Cieszewski, 2001). Con la metodología GADA se pueden obtener familias de curvas que, a la vez sean polimórficas y con asíntotas múltiples, y preservar las propiedades lógicas de ser invariantes de la edad de referencia y con respecto al camino de simulación (Cieszewski, 2003).

El reto principal en el desarrollo de ecuaciones dinámicas con el enfoque GADA depende de la disponibilidad de soluciones analíticas para la variable dependiente de la calidad de estación y, por tanto, el número de derivaciones posibles es limitado (Cieszewski y Strub, 2008).

El ajuste de ecuaciones dinámicas requiere de información recolectada en un mínimo de dos condiciones de estado diferentes y la información puede ser obtenida a través de medidas repetidas en parcelas permanentes de muestreo o de análisis troncales, reconstruyendo el crecimiento de los árboles con los anillos anuales de crecimiento (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006).

Los objetivos del presente estudio fueron: 1) derivar y plantear una ecuación dinámica en forma GADA a partir de la ecuación base de Chapman-Richards (Richards, 1959), 2) comparar la ecuación desarrollada con dos formas GADA, la primera basada en el modelo de Chapman-Richards (Krumland y Eng, 2005), y la segunda en el modelo de Korf (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*, 2011) y 3) ajustar la ecuación dinámica en forma global (modelo reducido) y compararla con el uso de variables indicadoras (modelo completo) para determinar diferencias y similitudes estadísticas en los patrones de crecimiento de las especies estudiadas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Descripción del área de estudio y datos utilizados

La base de datos utilizada se recolectó en masas forestales del Ejido San Diego de Tzains, en el Estado de Durango, México, en la Sierra Madre Occidental (24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" N y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" O). Los tipos de climas predominantes del sitio son templado, cálido húmedo y templado subhúmedo, con precipitación media anual de 1375 mm. Las temperaturas medias varían de 8 °C en las zonas más altas a 24 °C en las zonas bajas, en las cuales la altitud media llega a 600 m.

depends on the existence of analytical solutions for the dependent variable of site quality, and therefore, the number of possible derivations is limited (Cieszewski and Strub, 2008).

The fitting of dynamic equations requires information collected under a minimum of two conditions of different state, and the information can be obtained through measures repeated in permanent plots of sampling or stem analysis, reconstructing tree growth with the annual growth rings (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006).

The objectives of the present study were as follows: 1) to derive and state a dynamic equation in GADA form from the base equation of Chapman-Richards (Richards, 1959), 2) to compare the equation developed with two GADA equations, the first based on the Chapman-Richards (Krumland and Eng, 2005), and the second in the Korf model (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*, 2011) and 3) to fit the global dynamic equation (reduced model) and compare the equation with dummy variables (full model) to determine statistical differences and similarities in the growth patterns of the species studied.

MATERIALS AND METHODS

Description of the study area and utilized data

The database was collected in forest stands of the Ejido San Diego de Tzains, in the state of Durango, México, in the Western Sierra Madre (24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" N and 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" W). The predominant types of climate of the site are temperate, warm humid and temperate sub-humid, with mean annual rainfall of 1375 mm. Mean temperatures vary from 8 °C in the highest zones to 24 °C in the low zones, in which the mean altitude reaches 600 m. Total surface of the study area is 62,802 ha, of which 26 038 have forest management.

The database that was used has 707, 948, 691, 441 and 348 measurements of height and age of 45, 67, 49, 29 and 24 dominant-co-dominant trees cut and evaluated as stem analysis for *Pinus arizonica* Engelm, *Pinus durangensis* Mart., *Pinus teocote* Schl. et Cham., *Pinus leiophylla* Schl. et Cham and *Pinus ayacahuete* Ehrenb. The data were collected in the mixed stands of the study area, including the different site qualities and diametric categories present in the area with forest management. To obtain the pairs of height-age in each one of the trees, the procedure proposed by Carmean (1972) was used, which is efficient for this type of analysis.

La superficie total del predio es 60,802 ha, de las cuales 26 038 tienen manejo forestal.

La base de datos que se utilizó tiene 707, 948, 691, 441 y 348 mediciones de altura y edad de 45, 67, 49, 29 y 24 árboles dominantes-codominantes derribados y evaluados como análisis troncales para *Pinus arizonica* Engelm, *Pinus durangensis* Mart., *Pinus teocote* Schl. Et Cham., *Pinus leiophylla* Schl. Et Cham y *Pinus ayacahuite* Ehrenb. Los datos fueron recolectados en las masas mezcladas del predio, incluidas las diferentes calidades de estación y las categorías diamétricas presentes en el área con manejo forestal. Para obtener los pares de altura-edad en cada uno de los árboles, se utilizó el procedimiento propuesto por Carmean (1972), que es eficiente para este tipo de análisis.

Ecuación propuesta

El desarrollo de una ecuación dinámica en forma GADA considera los siguientes pasos: 1) se selecciona una ecuación base y se identifican los parámetros de la ecuación que serán dependientes de la productividad del sitio; 2) los parámetros seleccionados se expresan como funciones de la calidad de estación definida por la variable χ (variable no observable e independiente que describe la productividad del sitio como resultado de la suma de factores ecológicos, climáticos y otros, como regímenes de manejo y condiciones del suelo) y los parámetros nuevos; 3) la ecuación base bidimensional seleccionada es expandida a una ecuación tridimensional de índice de sitio, y 4) se despeja el valor de χ a partir de condiciones iniciales de la estación, es decir, de valores de partida de altura y edad, de forma que el modelo pueda ser definido implícitamente y aplicado en la práctica (Cieszewski y Bailey, 2000; Cieszewski, 2002).

El modelo de Chapman-Richards (Richards, 1959) es flexible y ha sido utilizado ampliamente en la construcción de curvas de índice de sitio e incremento de la altura en relación con la edad, es representado como:

$$H(t, \alpha_i) = \alpha_1(1 - e^{-\alpha_2 t})^{\alpha_3} \quad (1)$$

donde H es la altura dominante, t la edad, α_1 es el parámetro que representa la asíntota horizontal, α_2 la tasa de crecimiento, α_3 la tasa de cambio y e la función exponencial.

Se asume que los parámetros que representan la asíntota y la tasa de cambio pueden ser expresados como funciones de la calidad de estación, definidos por la variable χ , de acuerdo a un modelo lineal inverso (Kiviste *et al.*, 2002), representados como m y b, para α_1 y α_3 (Cieszewski y Strub, 2008). La función lineal inversa considera que hipotéticamente los parámetros pueden ser

Proposed equation

The development of a dynamic equation in GADA form considers the following steps: 1) a base equation is selected and the parameters of the equation are identified, which will be dependent on the productivity of the site 2) the selected parameters are expressed as functions of the station quality defined by the variable χ (non-observable and independent variable that describes the productivity of the site as the result of the sum of ecological, climatic and other factors, such as management regimes and soil conditions) ; 3) the selected bi-dimensional base equation is expanded to a tridimensional equation of site index, and 4) the value of χ is cleared from initial conditions of the station, that is, from initial values of height and age, so that the model can be implicitly defined and applied in practice (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2002).

The model of Chapman-Richards (Richards, 1959) is flexible and has been widely used in the construction of site index curves and of increment of height with respect to age, and is represented as follows:

$$H(t, \alpha_i) = \alpha_1(1 - e^{-\alpha_2 t})^{\alpha_3} \quad (1)$$

where H is the dominant height, t the age, α_1 is the parameter that represents the horizontal asymptote, α_2 is the growth rate, α_3 the exchange rate and e is the exponential function.

It is assumed that the parameters represented by the asymptote and exchange rate can be expressed as functions of the site quality, defined by the variable χ , according to an inverse linear model (Kiviste *et al.*, 2002), represented as m and b, for χ_1 and χ_3 (Cieszewski and Dtrub, 2008). The inverse linear function considers that hypothetically the parameters can be modeled as a function of the inverse of the non-observable variable, which represents site quality, which has not been studied for the derivation of dynamic equations, expressed as:

$$m(x) = m_1 + m_2 \frac{1}{x} \quad y \quad b(x) = b_1 + b_2 \frac{1}{x}$$

The GADA equation, with variable growth rates and multiple asymptotes when $b_1=0$, $b_2=1$ and renaming parameter α_2 as β_3 to be expressed as parameter of dynamic equations of growth $\alpha_1(x) = e^{(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x})}$, $\alpha_3(x) = \frac{1}{x}$ and $\alpha_2 = \beta_3$,

re-parametrizing the expression (1) and in the initial state

$$H_0 = f(t_0, \chi, \beta_i) \text{ will be:}$$

modelados en función de la inversa de la variable no observable, que representa la calidad de estación, la que no ha sido estudiada para la derivación de ecuaciones dinámicas, expresada como;

$$m(x) = m_1 + m_2 \frac{1}{x} \quad y \quad b(x) = b_1 + b_2 \frac{1}{x}.$$

La ecuación GADA, con tasas de crecimiento variables y múltiples asíntotas cuando $b_1=0$, $b_2=1$ y renombrando el parámetro α_2 como β_3 para ser expresado como parámetro de ecuaciones

dinámicas de crecimiento $\alpha_1(x) = e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x}\right)}$, $\alpha_3(x) = \frac{1}{x}$ y $\alpha_2 = \beta_3$, reparametrizando la expresión (1) y en el estado inicial $H_0 = f(t_0, \chi, \beta_i)$ será:

$$H_0(t_0, \chi, \beta_i) = e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_0}\right)^{\frac{1}{\chi}} \quad (2)$$

Tomando logaritmos naturales para ambos lados de la ecuación (semi-linearizada) (2), expresada en (3).

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_0}\right)^{\frac{1}{\chi}} \right] \quad (3)$$

Resolviendo para χ se encontró la expresión dada por (4).

$$x = \frac{\ln(1 - e^{-\beta_3 t_0}) + \beta_2}{\ln(H_0) - \beta_1} \quad (4)$$

Substituyendo en el estado $H_1 = f(t_1, x, \beta_i)$ se obtiene la derivación de la ecuación dinámica basada en la ecuación de Chapman-Richards, la cual provee familias de curvas con polimorfismo complejo, dada por la siguiente expresión:

$$H_1(t_0, t_1, H_0, \beta_i) = e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_1}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (E1)$$

La ecuación dinámica de crecimiento GADA posee un punto de inflexión a la edad t_1 y una expresión del incremento corriente anual de la altura dominante (ICA), dados en (5) y (6).

$$t_1 = -\frac{\ln(\chi)}{\beta_3} \quad (5)$$

$$H_0(t_0, \chi, \beta_i) = e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_0}\right)^{\frac{1}{\chi}} \quad (2)$$

Taking natural logarithms for both sides of the equation (semi-linearized) (2) expressed in (3):

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_0}\right)^{\frac{1}{\chi}} \right] \quad (3)$$

Resolving parameter χ , the expression given by (4) was found:

$$x = \frac{\ln(1 - e^{-\beta_3 t_0}) + \beta_2}{\ln(H_0) - \beta_1} \quad (4)$$

Substituting in the state $H_1 = f(t_1, x, \beta_i)$, the derivation of the dynamic equation is obtained based on the Chapman-Richards equation, which provides families of curves with complex polymorphism, give by the following expression:

$$H_1(t_0, t_1, H_0, \beta_i) = e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_1}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (E1)$$

The dynamic equation of growth GADA has an inflection point at age t_1 and an expression of the annual current increment of dominant height (ICA), given in (5) and (6):

$$t_1 = -\frac{\ln(\chi)}{\beta_3} \quad (5)$$

$$ICA_{H_1} = \frac{e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} \left(1 - e^{-\beta_3 t_1}\right) \beta_3 e^{-\beta_3 t_1}}{\chi \left(1 - e^{-\beta_3 t_1}\right)} \quad (6)$$

The derived equation was compared with the global fitting for all of the species, with two dynamic equations used frequently for their flexibility in modeling dominant height. The first GADA equation used for the comparison of the proposed expression is based on equation (1), when α_1 and α_3 are assumed as dependents of the variable χ . To facilitate the derivation of the dynamic equation, the base model is re-parametrized taking as $\alpha_1 = e^x$, $\alpha_2 = \beta_2 + \frac{\beta_3}{x}$ and $\alpha_3 = \beta_1$. Considering the

$$ICA_{H_1} = \frac{e^{\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\chi}\right)} (1 - e^{-\beta_3 t_1}) \beta_3 e^{-\beta_3 t_1}}{\chi (1 - e^{-\beta_3 t_1})} \quad (6)$$

La ecuación derivada fue comparada con el ajuste global para todas las especies, con dos ecuaciones dinámicas usadas frecuentemente por su flexibilidad en la modelación de altura dominante. La primera ecuación GADA utilizada para la comparación de la expresión propuesta está basada en la ecuación (1), cuando α_1 y α_3 se asumen como dependientes de la variable χ . Para facilitar la derivación de la ecuación dinámica, el modelo base es

reparametrizado tomando como $\alpha_1 = e^x$, $\alpha_2 = \beta_2 + \frac{\beta_3}{x}$ y $\alpha_3 = \beta_1$. Considerando la ecuación en la condición inicial t_0 y H_0 dado por (7) y aplicando logaritmos naturales a ambos lados, la formulación es dada por (8).

$$H_0 = e^x (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{x}\right)} \quad (7)$$

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^x (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{x}\right)} \right] \quad (8)$$

La solución para χ implica encontrar la raíz de una ecuación de segundo grado y seleccionar la raíz positiva para sustituir en la ecuación dinámica (Cieszeski y Bailey, 2000). La solución para χ de la expresión (8) es dada en (9).

$$\chi = \frac{\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}) + \frac{[(\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}))^2 - 4\beta_3 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0})]^{1/2}}{2}}{2} \quad (9)$$

Assumiendo la ecuación (8) en el estado t_1 y H_1 y despejando e^x , resulta la siguiente ecuación dinámica que presenta curvas polimórficas con asíntotas variables (Krumland y Eng, 2005).

$$H_1 = H_0 \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 t_1}}{1 - e^{-\beta_1 t_0}} \right)^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi}\right)} \quad (E2)$$

equation in initial condition t_0 and H_0 given by (7) and applying natural logarithms to both sides, the formulation is given by (8):

$$H_0 = e^x (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{x}\right)} \quad (7)$$

$$\ln(H_0) = \ln \left[e^x (1 - e^{-\beta_1 t_0})^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{x}\right)} \right] \quad (8)$$

The solution for χ implies finding the root of a second grade equation and selecting the positive root to substitute in the dynamic equation (Cieszeski and Bailey, 2000). The solution for χ of expression (8) is given in (9):

$$\chi = \frac{\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}) + \frac{[(\ln H_0 - \beta_2 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0}))^2 - 4\beta_3 \ln(1 - e^{-\beta_1 t_0})]^{1/2}}{2}}{2} \quad (9)$$

Assuming equation (8) in state t_1 and H_1 clearing e^x , the following dynamic equation results which presents polymorphic curves with variable asymptotes (Krumland and Eng, 2005).

$$H_1 = H_0 \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 t_1}}{1 - e^{-\beta_1 t_0}} \right)^{\left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\chi}\right)} \quad (E2)$$

The second equation used is based on the base model (10) of Korf (1939), where α_1 is the asymptote, α_2 and α_3 refer to the inflection point and growth rate and e is the base of the natural logarithms.

$$H = \alpha_1 e^{(-\alpha_2 t^{-\alpha_3})} \quad (10)$$

The parameters α_1 and α_2 are assumed dependents of the variable χ , given by $\alpha_1 = e^x$ and $\alpha_2 = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\chi}$; changing $\alpha_2 = \beta_3$ and assuming the expression in the initial condition H_0 and t_0 , equation (11) remains.

La segunda ecuación utilizada se basa en el modelo base (10) de Korf (1939), donde α_1 es la asíntota, α_2 y α_3 refieren al punto de inflexión y la tasa de crecimiento y e es la base de los logaritmos naturales.

$$H = \alpha_1 e^{(-\alpha_2 t^{-\alpha_3})} \quad (10)$$

Los parámetros α_1 y α_2 se asumen dependientes de la variable χ , dados por $\alpha_1 = e^\chi$ y $\alpha_2 = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\chi}$; cambiando $\alpha_2 = \beta_3$ y asumiendo la expresión en la condición inicial H_0 y t_0 , queda la ecuación (11).

$$H_0 = e^\chi \chi e^{\left(\frac{-(\beta_1 + \beta_2)}{\chi} t^{-\beta_3}\right)} \quad (11)$$

La solución para χ (12), que al incorporarla a la ecuación (11) en el estado H_1 y t_1 , resulta la ecuación (E3), la cual presenta curvas polimórficas con asíntotas variables (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*, 2011).

$$\chi = \frac{1}{2} t_0^{-\beta_3} [(\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0)) + (4\beta_2 t_0^{-\beta_3} + (\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0))^2)^{1/2}] \quad (12)$$

$$H_1 = e^\chi \chi e^{\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) t^{-\beta_3}\right)} \quad (13)$$

Estadísticos de ajuste para comparación de modelos

La bondad de ajuste de los modelos se midió a través del análisis numérico y gráfico de residuales y además se analizaron gráficamente las predicciones del modelo para revisar si eran biológicamente adecuadas a los datos utilizados (Goelz y Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

Coefficiente de determinación ajustado

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]$$

$$H_0 = e^\chi \chi e^{\left(\frac{-(\beta_1 + \beta_2)}{\chi} t^{-\beta_3}\right)} \quad (11)$$

The solution for χ (12), which by incorporating it to equation (11) in state H_1 and t_1 , gives equation (E3), which presents polymorphic curves with variable asymptotes (Barrio-Anta *et al.*, 2006; Sharma *et al.*, 2011).

$$\chi = \frac{1}{2} t_0^{-\beta_3} [(\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0)) + (4\beta_2 t_0^{-\beta_3} + (\beta_1 + t_0^{-\beta_3} \ln(H_0))^2)^{1/2}] \quad (12)$$

$$H_1 = e^\chi \chi e^{\left(-\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\chi}\right) t^{-\beta_3}\right)} \quad (13)$$

Statistics of adjustment for comparison of models

The goodness of fit of the models was measured through numerical and graphic analysis of residuals and in addition the predictions of the model were analyzed graphically to check if they were biologically adequate to the data used (Goelz and Burk, 1992; Sharma *et al.*, 2011).

Fitted coefficient of determination

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]$$

Mean squared root of the error

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Absolute average bias

$$E = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})}{n} \right|$$

Coefficient of variation

$$CV = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - 1 \right)^{1/2}}{\bar{y}} \times 100$$

Raíz del cuadrado medio del error

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sesgo promedio absoluto

$$E = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})}{n} \right|$$

Coefficiente de variación

$$CV = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - 1 \right)^{1/2}}{\bar{y}} \times 100$$

Criterio de información de Akaike (Lu y Zhang, 2011)

$$AIC = 2p + n \left[\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right) \right]$$

Prueba de Durbin-Watson (Durbin y Watson, 1971)

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Prueba estadística de F (Washington *et al.*, 2011)

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_R}{SSE_F / df_F}$$

donde y_i , $\hat{y}$ e $\bar{y}$ son los valores observado, predicho y medio de la altura, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo, e_i el valor residual del modelo ajustado, F^* es el valor de la prueba estadística que sigue una distribución F, SSE_R y SSE_F son la suma de cuadrados del error de los modelos reducido y completo y df_R y df_F son los grados de libertad de los modelos reducido y completo, respectivamente.

Ajuste de los parámetros

Los parámetros globales y específicos del sitio fueron ajustado simultáneamente a través del procedimiento iterativo (nested iterative procedure) descrito por Tait *et al.* (1988); este procedimiento genera resultados adecuados cuando se usan bases de

Information criterion of Akaike (Lu and Zhang, 2011)

$$AIC = 2p + n \left[\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \right) \right]$$

Test of Durbin-Watson (Durbin and Watson, 1971)

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Statistical test of F (Washington *et al.*, 2011)

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_R}{SSE_F / df_F}$$

where y_i , $\hat{y}$ and $\bar{y}$ are the observed values, predicted and mean of height, n is the number of observations, p is the number of parameters of the model, e_i is the residual value of the fitted model, F^* is the value of the statistical test that follows a distribution F, SSE_R and SSE_F are the sum of squares of the error of the reduced and complete model and df_R and df_F are the degrees of freedom of the reduced and complete model, respectively.

Fit of the parameters

The global and specific parameters of the site were fitted simultaneously by means of the iterative procedure (nested iterative procedure) described by Tait *et al.* (1988); this procedure generates adequate results when databases with more than 800 pairs of height-age values are used (Cieszewski, 2003; Krumland and Eng, 2005). Cieszewski *et al.* (2000b) indicate that this approach is similar to modeling with mixed effects, but the specific parameters are not explicitly modeled.

The models were fitted using in the residuals a continuous autoregressive structure (CAR(x)) of the third order for each tree, to correct the autocorrelation of the term of the error (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001; Nord-Larsen, 2006; Crecente-Campo *et al.*, 2009) and to obtain unbiased and efficient estimators of the parameters (Parresol and Vissage, 1998).

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} I_k \rho_k^{h_{ij} - h_{ij-k}} e_{ij-k} + \epsilon_{ij}$$

where e_{ij} is the ordinary j residual in the observation i , e_{ij-k} is the $j-k$ ordinary residual of the observation i , $i_k = 1$ when $j > k$ and 0 when $j \leq k$, ρ_k is the order k of the continuous autoregressive

datos con más de 800 pares de valores altura-edad (Cieszewski, 2003; Krumland y Eng, 2005). Cieszewski *et al.* (2000b) indican que este enfoque es similar a la modelación con efectos mixtos, pero los parámetros específicos no son modelados explícitamente.

Los modelos fueron ajustados usando en los residuales una estructura autoregresiva continua (CAR(x)) de tercer orden para cada árbol, para corregir la autocorrelación del término del error (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001; Nord-Larsen, 2006; Crecente-Campo *et al.*, 2009) y obtener estimadores de los parámetros insesgados y eficientes (Parresol y Vissage, 1998).

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} I_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \epsilon_{ij}$$

donde e_{ij} es el j residual ordinario en la observación i , e_{ij-k} es el $j-k$ residual ordinario de la observación i , $I_k = 1$ cuando $j > k$ y 0 cuando $j \leq k$, ρ_k es el orden k del parámetro autorregresivo continuo a ser estimado y $h_{ij}-h_{ij-k}$ es la distancia de separación de la observación de la altura j a la $j-k$ en cada árbol i , con $h_{ij} > h_{ij-k}$. Así ϵ_{ij} es el error independiente que sigue una distribución normal con media cero y varianza constante.

Para reducir los efectos por heterocedasticidad, la varianza del error fue asumida como una función de potencia de la altura predicha (Huang *et al.*, 2000; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006). El factor de ponderación utilizado fue $w_i = \hat{H}_1^k$, donde k es una constante que tomó el valor de 0.05, para lograr la homogeneidad de los residuales y la consistencia de los estimadores de los parámetros.

Para ajustar la ecuación dinámica propuesta, diferenciando el crecimiento entre especies (para los parámetros globales), se usaron variables indicadoras y a *Pinus durangensis* como la especie base, por que presenta el número mayor de observaciones; las variables indicadoras fueron definidas como sigue:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si } sp=j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

donde I_j representa la variable indicadora para cada especie (sp), $j=2$ *Pinus arizonica*, 3 *P. teocote*, 4 *P. leiophylla* y 5 *P. ayacahuite*.

Los parámetros de la expresión (E1) fueron replanteados en función de las variables indicadoras, los efectos aditivos son de las especies diferentes a *P. durangensis*, de forma tal que cada parámetro global β_i se puede escribir de manera general como:

$$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5$$

parameter to be estimated and $h_{ij}-h_{ij-k}$ is the distance of separation of the observation of the height j to the $j-k$ in each tree i , with $h_{ij} > h_{ij-k}$. Thus ϵ_{ij} is the independent error that follows a normal distribution with mean zero and constant variance.

To reduce the effects from heterocedasticity, the variance of the error was assumed as a function of power of the predicted height (Huang *et al.*, 2000; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006). The factor of weighting used was $w_i = \hat{H}_1^k$, where k is a constant that took the value of 0.05, to achieve the homogeneity of the residuals and the consistency of the estimators of the parameters.

To fit the proposed dynamic equation, differentiating the growth among species (for the global parameters), dummy variables were used and *Pinus durangensis* as the base species, because it presents the highest number of observations; the dummy variables were defined as follows:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si } sp=j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

where I_j represents the dummy variable for each species (sp), $j = 2$ *Pinus arizonica*, 3 *P. teocote*, 4 *P. leiophylla* and 5 *P. ayacahuite*.

The parameters of the expression (E1) were restated as a function of the dummy variables, the additive effects are of the species different from *P. durangensis*, so that each global parameter β_i can be written in a general form as:

$$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5$$

For $i = 1, 2, 3$ of the parameters of the derived equation. The full model with the use of dummy variables is given by E4, which only considers the significant parameters at a significance level of 5 % for the species studied.

$$H_1 = e^{\left((\beta_{11} + \beta_{12}I_2 + \beta_{15}I_5) + (\beta_{21}) \frac{1}{x} \right)} \times \left(1 - e^{-(\beta_{31} + \beta_{32}I_2 + \beta_{33}I_3 + \beta_{34}I_4)t_1} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (E4)$$

The dynamic equations of height growth, plus the structure of the third order autoregressive model, the function of power of the variance of the error and the dummy variables for the proposed model, were programmed and fitted simultaneously with the MODEL procedure of SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2011), which permits the dynamic actualization of the residuals.

Para $i = 1, 2, 3$ de los parámetros de la ecuación dinámica derivada. El modelo completo con el uso de variables indicadoras es dado por E4, el cual sólo considera los parámetros significativos a un nivel de significancia del 5 % para las especies estudiadas.

$$H_1 = e^{\left((\beta_{11} + \beta_{12}I_2 + \beta_{15}I_5) + (\beta_{21})\frac{1}{x} \right)} \times \left(1 - e^{-(\beta_{31} + \beta_{32}I_2 + \beta_{33}I_3 + \beta_{34}I_4)t_1} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (E4)$$

Las ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura, más la estructura del modelo autorregresivo de tercer orden, la función de potencia de la varianza del error y las variables indicadoras para el modelo propuesto, fueron programadas y ajustadas simultáneamente con el procedimiento MODEL de SAS/ETS[®] (SAS institute Inc., 2011), que permite la actualización dinámica de los residuales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros estimados, sus errores estándar y los estadísticos de ajuste se obtuvieron para todos los pares de edad altura (combinando todas las especies) (Cuadro 1). La bondad de ajuste y los parámetros estimados para el modelo propuesto con variables indicadoras con *Pinus durangensis* como base se presentan en el Cuadro 2. Sólo se utilizaron los parámetros significativos por especie del modelo completo. La prueba de F indicó que el modelo completo (E4) fue significativamente diferente al modelo reducido (E1) con un valor de rechazo menor al 1% ($\text{Pr}[F] < 0.0001$).

RESULTS AND DISCUSSION

The estimated parameters, their standard errors and the statistics of fit were obtained for all of the pairs of age-height (combining all of the species) (Table 1). The goodness of fit and the estimated parameters for the proposed model with dummy variables with *Pinus durangensis* as base are shown in Table 2. Only the significant parameters per species were used of the full model. The F test indicated that the full model (E4) was significantly different from the reduced model (E1) with a rejection rate lower than 1 % ($\text{Pr}[F] < 0.0001$).

The families of growth curves of the height obtained with the full model (E4) taking categories of site indices of 8 to 24 m, with intervals of 4 m for *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote* and *P. ayacahuite* and of 8 to 20 m for *P. leiophylla*, at a base-age of 60 years, show the tendencies of the data utilized (Figure 1).

Because the base equation does not have an algebraic expression of the absolute rotation (age at which the ICA and IMA are equal), the dynamic equation also does not present this attribute. The absolute rotation for the categories of site index were iteratively obtained by the difference between the ICA and IMA, giving values to the age and stabilizing the iterations in values close to zero. With the families of curves of ICA and IMA, the age with maximum production can be known (rotation of maximum yield in height) in height growth, referred to categories of site index (Figure 2). Table 3 shows the values of age at which the absolute rotation occurs by categories of site index at the base-age of 60 years.

Cuadro 1. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste (definidos previamente) de las ecuaciones dinámicas ajustadas a todos los pares de altura-edad.

Table 1. Estimated parameters, standard error and statistics of fit (previously defined) of the dynamic equations fitted to all of the pairs of height-age.

Ecuación		β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	R ² a	RMSE (m)	E (m)	CV	AIC	dw
E1	θ_i	5.010	-1.04	0.020	0.990	0.890	0.79	0.992	0.60	0.04	6.73	-3200	1.83
	ε_i	0.150	0.10	0.001	0.010	0.010	0.01						
E2	θ_i	0.020	0.32	3.550	1.150	0.950	0.86	0.996	0.40	0.03	4.50	-5695	1.62
	ε_i	0.001	0.08	0.201	0.010	0.012	0.01						
E3	θ_i	-2.172	54.59	0.450	0.990	0.880	0.79	0.992	0.60	0.05	6.76	-3163	1.81
	ε_i	0.140	0.88	0.020	0.010	0.010	0.01						

θ_i y ε_i : estimador y error estándar de los parámetros de las ecuaciones dinámicas ♦ θ_i and ε_i : estimator and standard error of the parameters of the dynamic equations.

Cuadro 2. Parámetros estimados, error estándar y estadísticos de ajuste (definidos previamente) del modelo completo.
Table 2. Estimated parameters, standard error and statistics of fit (previously defined) of the full model.

Modelo	β_i	θ_i	ε_i	Pr t	R2a	RMSE (m)	E (m)	CV	AIC	dw
E4	$\beta_{1(1)}$	5.261	0.181	<0.0001	0.993	0.59	0.04	6.62	-3284	1.86
	$\beta_{1(2)}$	0.208	0.070	0.0031						
	$\beta_{1(5)}$	0.400	0.086	<0.0001						
	$\beta_{2(1)}$	-1.224	0.124	<0.0001						
	$\beta_{3(1)}$	0.016	0.001	<0.0001						
	$\beta_{3(2)}$	0.010	0.001	<0.0001						
	$\beta_{3(3)}$	0.007	0.001	<0.0001						
	$\beta_{3(4)}$	0.003	0.001	0.0052						
	ρ_1	0.994	0.011	<0.0001						
	ρ_2	0.883	0.010	<0.0001						
	ρ_3	0.785	0.011	<0.0001						

β_i , θ_i y ε_i : parámetro, estimador y error estándar de los parámetros de la ecuación dinámica con variables indicadoras; Pr|t|: valor de probabilidad de la distribución t de Student ♦ β_i , θ_i and ε_i : parameter, estimator and standard error of the parameters of the dynamic equation with dummy variables; Pr|t|: value of probability of the t distribution of Student.

Las familias de curvas de crecimiento de la altura obtenidas con el modelo completo (E4) tomando categorías de índices de sitio de 8 a 24 m, con intervalos de 4 m para *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote* y *P. ayacahuite* y de 8 a 20 m para *P. leiophylla*, a una edad de referencia de 60 años, muestran las tendencias de los datos utilizados (Figura 1).

Debido a que la ecuación base no tiene una expresión algebraica del turno absoluto (edad a la cual el ICA y el IMA son iguales), la ecuación dinámica tampoco presenta esta cualidad. Los turnos absolutos para las categorías de índice de sitio fueron obtenidos iterativamente por la diferencia entre el ICA e IMA, dando valores a la edad y estabilizando las iteraciones en valores cercanos a 0. Con las familias de curvas de ICA e IMA puede conocerse la edad con máxima producción (turno de máximo rendimiento en altura) en crecimiento en altura, referido a categorías de índice de sitio (Figura 2). En el Cuadro 3 se presentan los valores de la edad a la cual sucede el turno absoluto por categorías de índice de sitio a la edad de referencia de 60 años.

La tendencia de los residuales estandarizados en función de la altura predicha no evidenció heterocedasticidad, y mostró el sesgo promedio por categoría de edad del ajuste del modelo completo con variables indicadoras para las especies estudiadas (Figura 3).

La solución para χ que describe la productividad del sitio asociada a los parámetros de la ecuación

The tendency of the standardized residuals as a function of predicted height did not evidence heterocedasticity, and showed the average bias per age category of the fit of the full model with dummy variables for the species studied (Figure 3).

The solution for χ that describes the productivity of the site associated with the parameters of the dynamic equation, represents a mathematically simpler expression than the solution of the contrasted models (Cieszewski and Bailey, 2000), thus the proposed equation (E1) can be considered to have more parsimony in the mathematical expression than the equation reported by Krumland and Eng (2005), based on the Chapman-Richards model, and that studied by Barrio-Anta *et al.* (2006) and Sharma *et al.* (2011), based on the Korf model. The derivation of the dynamic equation (E1) is centered on the parameter represented by the asymptote of the base model and not the parameter of the growth rate.

The equation (E1) generated families of growth curves with complex polymorphism, presented a point of inflection, was invariant with the base-age, was invariant with the simulation path and coincided with the data used in the fit (Cieszewski and Bella, 1989; Cieszewski, 2003; Cieszewski and Strub, 2008; Álvarez-González *et al.*, 2010; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). The derived equation conserved the number of parameters of the base equation and allowed the modeling of dominant height growth and site index.

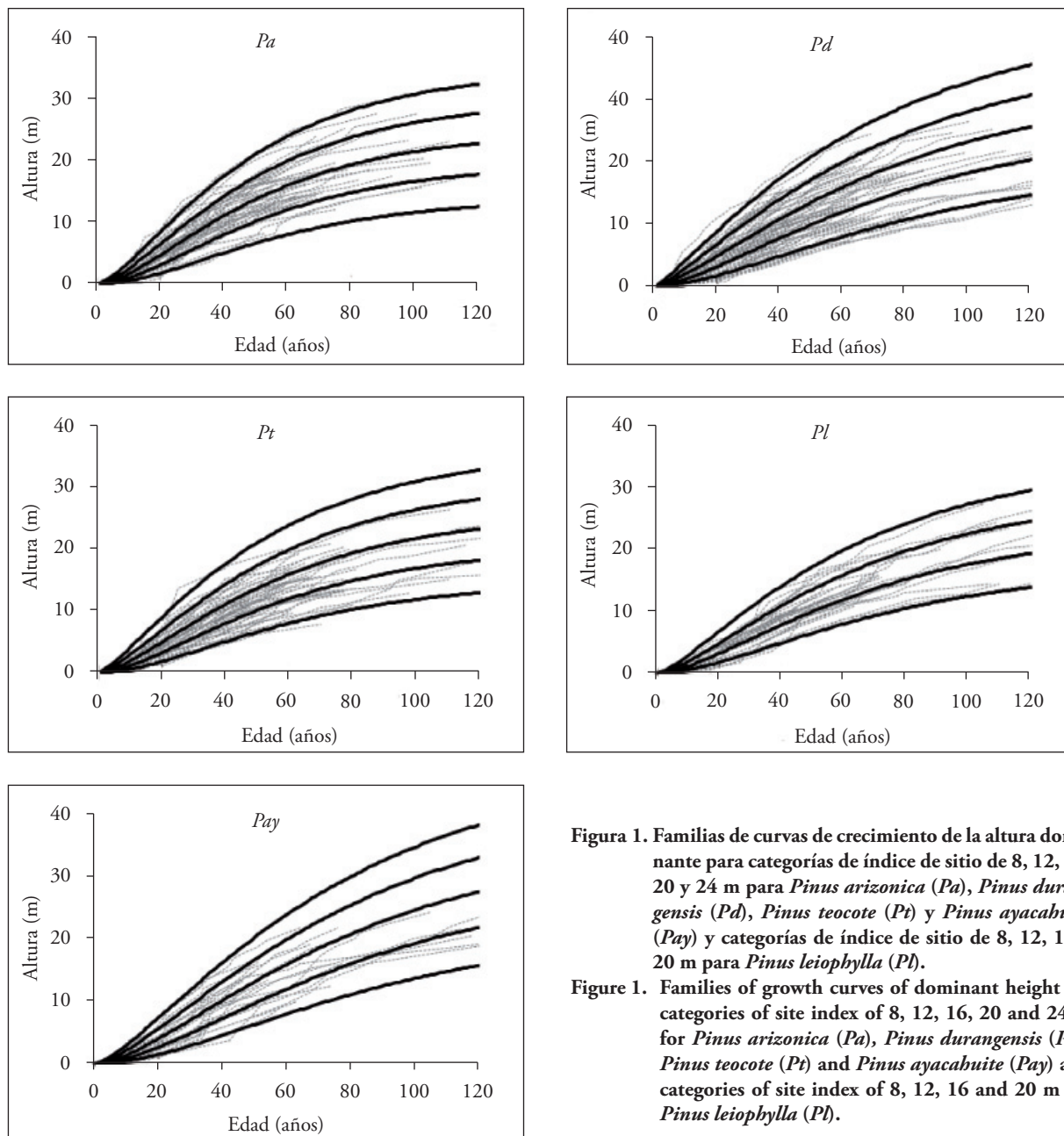


Figura 1. Familias de curvas de crecimiento de la altura dominante para categorías de índice de sitio de 8, 12, 16, 20 y 24 m para *Pinus arizonica* (Pa), *Pinus durangensis* (Pd), *Pinus teocote* (Pt) y *Pinus ayacabuite* (Pay) y categorías de índice de sitio de 8, 12, 16 y 20 m para *Pinus leiophylla* (Pl).

Figure 1. Families of growth curves of dominant height for categories of site index of 8, 12, 16, 20 and 24 m for *Pinus arizonica* (Pa), *Pinus durangensis* (Pd), *Pinus teocote* (Pt) and *Pinus ayacabuite* (Pay) and categories of site index of 8, 12, 16 and 20 m for *Pinus leiophylla* (Pl).

dinámica, representa una expresión matemática más sencilla que la solución de los modelos contrastados (Cieszewski y Bailey, 2000), por lo que la ecuación propuesta (E1) se puede considerar con mejor parsimonia en la expresión matemática que la ecuación reportada por Krumland y Eng (2005), basada en el modelo Chapman-Richards, y la estudiada por Barrio-Anta *et al.* (2006) y Sharma *et al.* (2011), basada en el modelo de Korf. La derivación

In the global fit (without distinction among species), the model (E2) was slightly superior, followed by (E1) and (E3) (Table 1). The model (E1) had an autoregressive structure of third order errors slightly superior in the correction of the autocorrelation of the errors, with value of 1.83 of the Durbin-Watson statistic, correcting with it the autocorrelation.

The fit of the dynamic equation (E4), with the use of dummy variables for the five species studied,

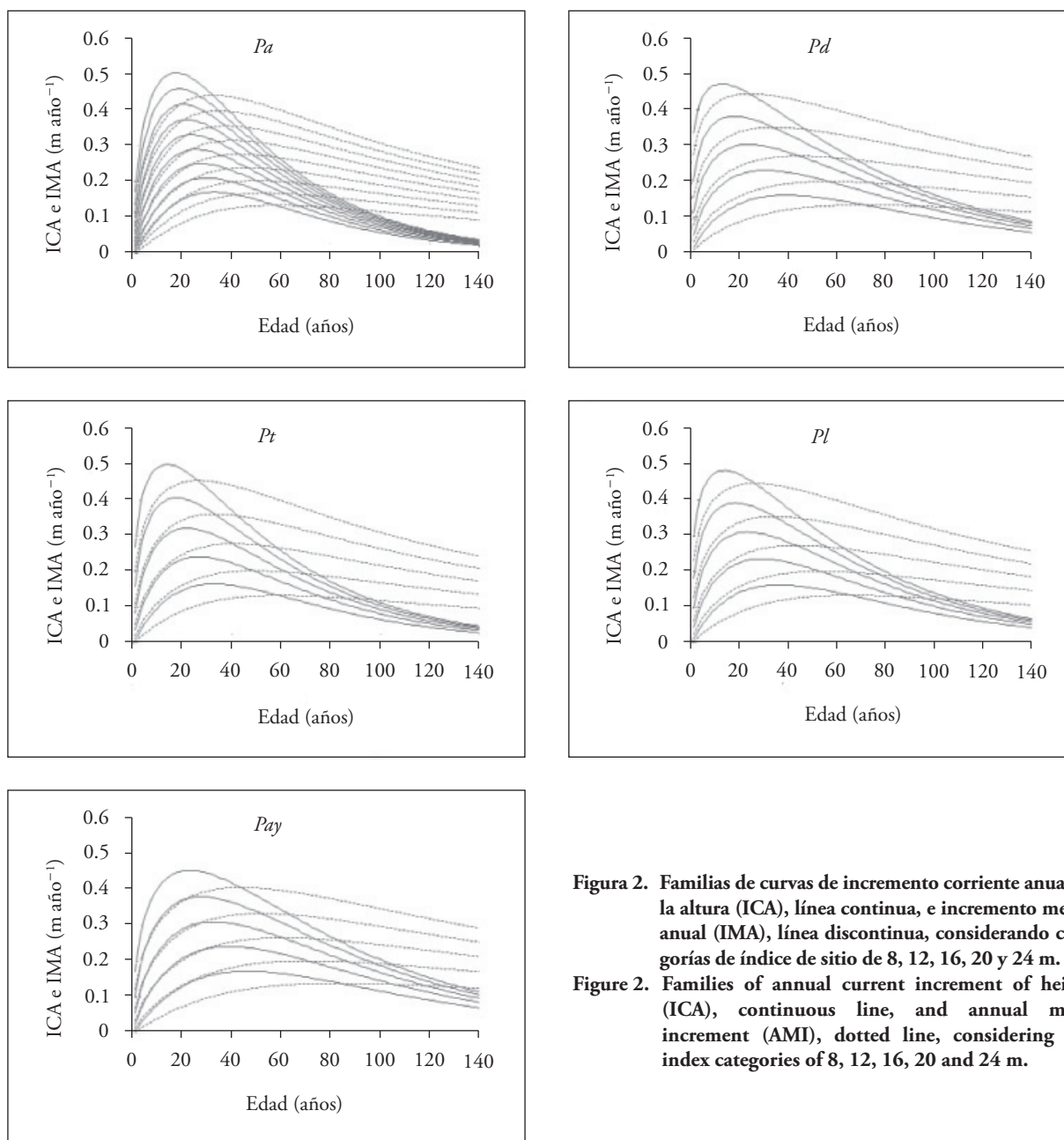


Figura 2. Familias de curvas de incremento corriente anual de la altura (ICA), línea continua, e incremento medio anual (IMA), línea discontinua, considerando categorías de índice de sitio de 8, 12, 16, 20 y 24 m.

Figure 2. Families of annual current increment of height (ICA), continuous line, and annual mean increment (AMI), dotted line, considering site index categories of 8, 12, 16, 20 and 24 m.

de la ecuación dinámica (E1) se centra en el parámetro que representa la asíntota del modelo base y no el parámetro de la tasa de crecimiento.

La ecuación (E1) generó familias de curvas de crecimiento con polimorfismo complejo, presentó un punto de inflexión, fue invariante con la edad base, fue invariante con el camino de simulación y coincidió con los datos usados en el ajuste (Cieszewski y Bella, 1989; Cieszewski, 2003; Cieszewski y Strub,

showed that the highest growth rates were presented by *Pinus durangensis*, *P. ayacahuite* and *P. arizonica*, whereas *Pinus teocote* and *P. leiophylla* have similar growth rates as the site index changes. For the mean site index (16 m), the rotation of maximum yield in height are stable.

The families of growth curves at the base-age of 60 years (Figure 1) and the absolute rotation (Table 3 and Figure 2) demonstrated that the species studied

Cuadro 3. Edad a la cual sucede el turno absoluto por índice de sitio, con edad de referencia de 60 años.
Table 3. Age at which absolute rotation occurs per site index, with base-age of 60 years.

Especie	Turno absoluto al índice de sitio (IS)								
	8	10	12	14	16	18	20	22	24
<i>Pa</i>	58.0	53.7	50.0	46.5	43.4	40.4	37.7	35.0	32.5
<i>Pd</i>	71.4	63.6	56.7	50.4	44.5	39.1	33.8	28.8	24.0
<i>Pt</i>	59.1	53.7	49.0	44.6	40.6	36.8	33.2	29.8	26.4
<i>Pl</i>	65.5	58.8	53.1	47.8	43.0	38.4	34.1	30.0	26.0
<i>Pay</i>	83.5	76.8	70.9	65.6	60.7	56.1	51.8	47.7	43.8

Pa: *Pinus arizonica*, *Pd*: *Pinus durangensis*, *Pt*: *Pinus teocote*, *Pl*: *Pinus leiophylla* y *Pay*: *Pinus ayacahuite*.

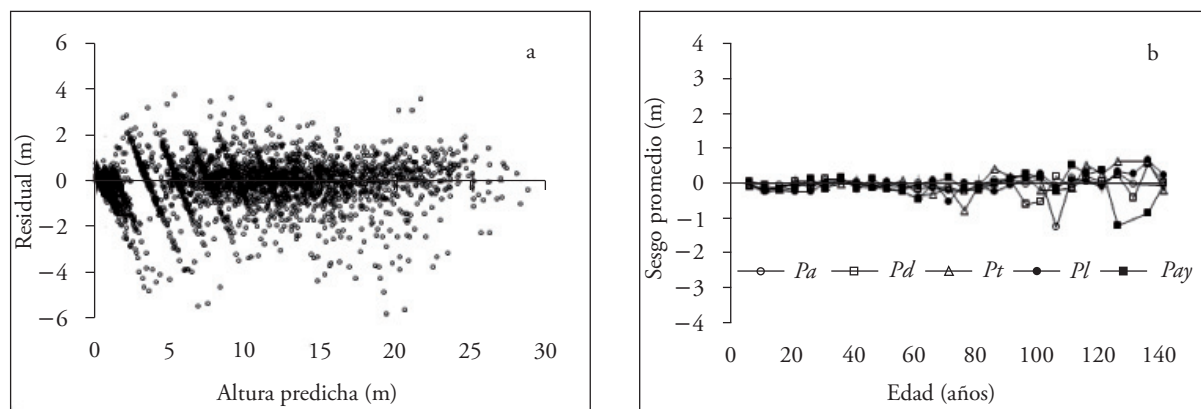


Figura 3. Residuales estandarizados en función de los valores predichos de altura dominante (a) y sesgo promedio por categoría de edad (b) del ajuste del modelo completo.

Figure 3. Standardized residuals as a function of the predicted values of dominant height (a) and average bias per age category (b) of the fit of the full model.

2008; Álvarez-González *et al.*, 2010; Vargas-Larreta *et al.*, 2010). La ecuación derivada conservó el número de parámetros de la ecuación base y permitió modelar el crecimiento de la altura dominante e índice de sitio.

En el ajuste global (sin distinción entre especies), el modelo (E2) resultó ligeramente superior, lo siguieron (E1) y (E3) (Cuadro 1). El modelo (E1) resultó con una estructura autorregresiva de errores de tercer orden ligeramente superior en la corrección de la autocorrelación de los errores, con valor de 1.83 del estadístico de Durbin-Watson, corrigiendo con ello la autocorrelación.

present different growth patterns of dominant height, and that their absolute rotations are different for the site indices, later occurring, as productivity is lower. This characteristic indicates that for the planning of forest management activities, forest interventions can be focused on a particular species, with ecological or timber importance. Therefore, management can be focused on the existing species or long-term reconversion of forest stands to species with better growth patterns and lower absolute rotations, with the ecological implications that are derived. Thus, the SI of a stand is a function of the most abundant species of the site. The patterns of dominant height

El ajuste de la ecuación dinámica (E4), con el uso de variables indicadoras para las cinco especies estudiadas, mostró que las tasas mayores de crecimiento las presentaron *Pinus durangensis*, *P. ayacahuite* y *P. arizonica*, mientras que *Pinus teocote* y *P. leiophylla* tienen tasas de crecimiento similares conforme cambia el índice de sitio. Para el índice de sitio medio (16 m), los turnos de máximo rendimiento en altura son estables.

Las familias de curvas de crecimiento a la edad base de 60 años (Figura 1) y los turnos absolutos (Cuadro 3 y Figura 2) demostraron que las especies estudiadas presentan diferentes patrones de crecimiento de la altura dominante y que sus turnos absolutos son distintos para los índices de sitio, ocurriendo más tarde, conforme la productividad es menor. Esta característica indica que para la planeación de las actividades de manejo forestal, las intervenciones silvícolas pueden enfocarse a una especie particular, con importancia ecológica o maderable. De esta forma, el manejo puede centrarse en las especies existentes o en la reconversión a largo plazo de las masas forestales a especies con patrones mejores de crecimiento y turnos absolutos menores, con las implicaciones ecológicas que se deriven, así, el IS de un rodal está en función de la especie más abundante en el sitio. Los patrones de crecimiento de la altura dominante, en el contexto de silvicultura de masas mezcladas de *Pinus*, sugieren que a mayor índice de sitio, los ciclos de corta pueden ser menores, pero exige un cuidado adecuado de la densidad y tratamientos complementarios al bosque.

CONCLUSIONES

La ecuación dinámica derivada a partir del modelo base de Chapman-Richards posibilita la modelación del crecimiento de altura dominante e índice de sitio. Esta estrategia de modelado es atractiva porque mantiene el mismo número de parámetros de la ecuación base y es realista en relación a las tendencias de los datos usados en el presente estudio. La estructura matemática obtenida es sencilla y tiene ventajas en parsimonia con las ecuaciones contrastadas.

El uso de la ecuación dinámica de crecimiento de la altura dominante e índice de sitio permitirá la clasificación (etiquetado) de la productividad forestal, para las unidades de manejo (subrodas), en la planeación de los tratamientos silvícolas y en la determinación

growth, in the context of forestry of mixed stands of *Pinus*, suggest that the higher the site index, the cutting cycles can be shorter, but it requires an adequate control of the density and complementary treatments to the forest.

CONCLUSIONS

The dynamic equation derived from the base model of Chapman-Richards allows the modeling of dominant height growth and site index. This modeling strategy is attractive because it maintains the same number of parameters of the base equation and is realistic with respect to the tendencies of the data used in the present study. The mathematical structure obtained is simple and has advantages in parsimony with the contrasted equations.

The use of the dynamic equation of dominant height growth will allow the classification (labeling) of forest productivity, for the management units (sub-stands) in the planning of forest treatments and in the determination of cutting periods, according to the absolute rotation by site quality.

—End of the English version—

-----*-----

de periodos de corta, de acuerdo a los turnos absolutos por calidad de estación.

AGRADECIMIENTOS

El desarrollo del trabajo fue realizado con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Beca No. 247171), del Programa Forestal del Colegio de Postgraduados, así como del Ejido San Diego de Tezains, Durango, México, que permitió tener acceso a la información.

LITERATURA CITADA

- Álvarez-González, J. G., A. Zingg, and K. V. Gadow. 2010. Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Ann. For. Sci.* 67: 1-13.
- Bailey, R. L., and J. L. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.* 20:155-159.
- Barrio-Anta, M., F. Castedo D., U. Diéguez-Aranda, J. G. Álvarez, B. R. Parresol, and R. Rodríguez. 2006. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Can. J. For. Res.* 36: 1461-1474.

- Carmean, W. H. 1972. Site index curves for upland oaks in the Central States. *For. Sci.* 18: 102-120.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.* 31: 165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48: 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3=(aX_m)/(c+X_m-1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *For. Sci.* 49: 539-554.
- Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46: 116-126.
- Cieszewski, C. J., R. L. Bailey, B. E. Borders, G. H. Brister, and B. D. Shiver. 2000a. Base-age invariance and inventory projections. In: Hansen, M.; and T. Burk (eds) Integrated tools for natural resources inventories in the 21st century. Gen. Tech. Rep. NC-212. St. Paul, MN: U.S. Dept. of Agriculture, Forest Service, North Central Forest Experiment Station. pp. 481-493.
- Cieszewski, C. J., and I. E. Bella. 1989. Polymorphic height and site index curves for lodgepole pine in Alberta. *Can. J. For. Res.* 19: 1151-1160.
- Cieszewski, C. J., M. Harrison, and S. W. Martin. 2000b. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. University of Georgia PMRC-TR 2000-7. 11 p.
- Cieszewski, C. J., and M. Strub. 2008. Generalized algebraic difference approach derivation of dynamic site equations with polymorphism and variables asymptotes from exponential and logarithmic functions. *For. Sci.* 54: 303-315.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. Timber management. Wiley, New York, USA. 333 p.
- Crecente-Campo, F., A. Rojo, and U. Diéguez-Aranda. 2009. A merchantable volume system for *Pinus sylvestris* L. in the major mountain ranges of Spain. *Ann. For. Sci.* 66: 1-12.
- Diéguez-Aranda, U., H. E. Burkhart, and R. L. Amateis. 2006. Dynamic Site Model for Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) Plantations in the United States. *For. Sci.* 53:262-272.
- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58: 1-19.
- Goelz, J. C. G., and T. E. Burk. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Can. J. For. Res.* 22: 776-784.
- Huang, S., D. Price, D. Morgan, and K. Peck. 2000. Kozak's variable exponent taper equation regionalized for white spruce in Alberta. *West. J. Appl. For.* 15: 75-85.
- Kiviste, A., J. G. Álvarez G., A. Rojo A., y A. D. Ruiz G. 2002. Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Monografía INIA: Forestal No 4. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria (INIA), Madrid, España. 190 p.
- Korf, V. 1939. Póispívek k matematické definici vzrůstového zákona lesních porostů. *Lesnická práce* 18: 339-356.
- Krumland, B., and H. Eng. 2005. Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California. California Department of Forestry and Fire Protection. California Forestry Report No. 4. 220 p.
- Lu, J., and L. Zhang. 2011. Modeling and prediction of tree height-diameter relationships using spatial autoregressive models. *For. Sci.* 57: 252-264.
- Martín-Benito, D., G. Gea-Izquierda, M. Del Río, and I. Cañellas. 2008. Long-term trends in dominant-height growth of black pine using dynamic models. *For. Ecol. Manage.* 256: 1230-1238.
- Nord-Larsen, T. 2006. Developing dynamic site index curves for European beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark. *For. Sci.* 52: 173-181.
- Parresol, B. R., and J. S. Vissage. 1998. White pine site index for southern forest survey. Res. Pap. SRS-10. U.S. Department of Agriculture. Forest Service. Southern Research Station. Asheville, NC. 8 p.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth curve for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10: 290-300.
- SAS Institute Inc., 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC, SAS Institute Inc.
- Sharma, R. P., A. Brunner, T. Eid, and B. H. Oyen. 2011. Modeling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age error. *For. Ecol. Manage.* 262: 2116-2175.
- Tait, D. E., C. J. Cieszewski, and I. E. Bella. 1988. The stand dynamics of lodgepole pine. *Can. J. For. Res.* 18: 1255-1260.
- Torres-Rojo, J. M., y A. G. Valles-Gándara. 2007. Índice de productividad de sitios multispecíficos a través de funciones de distancia en sitios forestales. *Agrociencia* 41: 687-700.
- Vanclay, J. 1994. Modelling Forest Growth and Yield. Applications to mixed tropical forests. CAB International, Wallingford. UK. 312 p.
- Vargas-Larreta, B., J. G. Álvarez-González, J. J. Corral-Rivas, y O. A. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Rev. Fitotec. Mex.* 33: 343-351.
- Washington, S. P., M. G. Karlaftis, and F. L. Mannering. 2011. Statistical and Econometric methods for transportation data analysis. A Chapman & Hall Book/CRC Taylor & Francis Group. Second Edition. New York, NY, USA. pp. 106-109.
- Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). *Test* 10: 1-73.