

SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN COMERCIAL PARA LAS PRINCIPALES ESPECIES DE *Pinus* EN DURANGO, MÉXICO

COMPATIBLE TAPER AND MERCHANTABLE VOLUME SYSTEM FOR MAJOR PINE SPECIES IN DURANGO, MEXICO

Gerónimo Quiñonez-Barraza¹, Héctor M. De los Santos-Posadas^{1*},
Juan G. Álvarez-González², Alejandro Velázquez-Martínez¹

¹Postgrado Forestal, Campus Montecillo, Colegio de Postgraduados. Carretera México-Tezcuco km 36.5. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México, México. ²Universidad de Santiago de Compostela, Unidad de Gestión Forestal Sostenible. Lugo, España. (hmsantos@colpos.mx).

RESUMEN

La estimación del volumen total y comercial es una herramienta básica en la planeación y manejo forestal, por lo cual el objetivo de este estudio fue evaluar tres sistemas segmentados de ahusamiento y volumen comercial con corteza, ajustados como ecuaciones simultáneas para datos de especies forestales comerciales de Durango, México. Los ajustes se realizaron desde tres perspectivas: 1) para cada especie en los tres sistemas, 2) ajustes globales combinando todas las especies (modelo reducido) y, 3) ajuste global considerando variables indicadoras (modelo completo). El ajuste de los sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial sugieren que las especies estudiadas presentan dos puntos de inflexión; la forma dendrométrica de neiloide a paraboloides, en promedio para las especies estudiadas, sucede a 5 % de la altura total, mientras que el cambio de paraboloides a cono ocurre a 73 %. El sistema 3 (S3) posee mejores cualidades de ajuste entre los sistemas analizados, y el modelo completo con variables indicadoras con efectos aditivos a *Pinus durangensis* Martínez resultó mejor que el modelo reducido. Con el modelo completo *Pinus ayacahuite* Ehrenb presenta los fustes menos cilíndricos; *Pinus arizonica* Engelmánii presenta los fustes más cilíndricos, mientras que *P. durangensis* Martínez, *Pinus leiophylla* Schlecht Cham y *Pinus teocote* Schlecht et Cham tienen una forma paraboloides similar. El modelo completo hace eficiente el ajuste del sistema compatible, todos los datos se utilizan en el proceso de ajuste y los errores estándar de los parámetros disminuyen.

Palabras clave: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, sistema compatible.

ABSTRACT

The estimate of the merchantable and total volume is an essential tool in the forest planning and management, so the aim of this study was to evaluate three segmented systems of taper and merchantable volume with bark fitted as simultaneous equations for data from commercial forest species of Durango, Mexico. Fittings were made from three perspectives: 1) for each species in the three systems, 2) global fittings combining all species (reduced model) and 3) overall fit considering dummy variables (full model). Fitness of compatible systems of taper and merchantable volume suggest that studied species present two inflection points; the dendrometric shape from neiloid to paraboloid, on average for the species studied, happens at 5 % of the total height, whereas the change from paraboloid to cone occurs at 73 %. System 3 (S3) has better qualities of fit between the analyzed systems and the full model with indicator variables with additive effects on *Pinus durangensis* Martínez was better than the reduced model. With the full model, *Pinus ayacahuite* Ehrenb presents the less cylindrical stem; *Pinus arizonica* Engelmánii presents the more cylindrical boles, whereas *P. durangensis* Martínez, *Pinus leiophylla* Schlecht et Cham and *Pinus teocote* Schlecht et Cham have a similar paraboloid shape. The full model makes efficient the fit of the compatible system, all data in the fit process are used and standard errors of the parameters are reduced.

Key words: *Pinus arizonica*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus teocote*, compatible system.

INTRODUCTION

The estimate of the total and merchantable volume of trees in a stand is an essential tool in forest inventories and is essential in forest

*Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: abril, 2014. Aprobado: julio, 2014.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 48: 553-567. 2014.

INTRODUCCIÓN

La estimación del volumen total y comercial de los árboles de un rodal es una herramienta básica en los inventarios forestales y esencial en la planeación del manejo forestal (Corral-Rivas y Návar-Cháidez, 2009). Las estimaciones de volumen comercial permiten predicciones a cualquier diámetro sobre el fuste y altura deseados (Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Crecente-Campo *et al.*, 2009). La predicción del volumen comercial individual y de masas forestales se realiza a través de varios métodos, y los más usuales incorporan el uso de ecuaciones de razón del volumen y de ahusamiento. Las ecuaciones de volumen predicen el volumen comercial de un árbol como un porcentaje del volumen total del fuste y las ecuaciones de ahusamiento son formulaciones matemáticas que describen la forma del fuste. La integración de las secciones aportadas por la ecuación de ahusamiento, del suelo hasta la altura total del árbol, proporciona el volumen total del fuste. Si en lugar de la altura total del árbol se emplea una altura inferior, se obtendrá el volumen comercial hasta dicha altura (Jordan *et al.*, 2005; Zakrzewski y MacFarlane, 2006).

La clasificación de los modelos de ahusamiento se define por la complejidad en las expresiones matemáticas y de acuerdo con el número de variables y coeficientes involucrados en el modelo. Así se distinguen los modelos más simples (Ormerod, 1973), los modelos de ahusamiento de forma variable (Kozak, 1988; Newnhan, 1990) y los modelos polinomiales segmentados (Bruce *et al.*, 1968; Max y Burkhart, 1976; Cao *et al.*, 1980). Además, la compatibilidad de los sistemas de ahusamiento y volumen se define por la integración de la ecuación de ahusamiento y se obtiene la ecuación de volumen; así, para una ecuación de volumen comercial existe de manera intrínseca una función de ahusamiento (Clutter, 1980; Crecente-Campo *et al.*, 2009).

El ajuste de un sistema de ecuaciones simultáneas puede complementarse con la adición de efectos aleatorios con modelos de efectos mixtos (MEM), lo cual permite controlar la variación aleatoria individual del árbol y desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación; además, es posible usar estimaciones de los efectos aleatorios para tener predicciones precisas de nuevas observaciones (Fang y Bailey, 2001; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

management planning (Corral-Rivas and Návar-Cháidez, 2009). Merchantable volume estimates allow predictions at any diameter on the stem and height desired (Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Crecente-Campo *et al.*, 2009). The prediction of individual merchantable volume and forest stands is performed through various methods, and the most common ones include the use of taper-volume equations. The volume equations predict the merchantable volume of tree as a percentage of total stem volume and the taper equations are mathematical formulations that describe the stem shape. The integration of sections provided by the taper equation, from the ground to the total height of the tree, provides the total stem volume. If instead of the total tree height a lower height is used, the merchantable volume will be obtained up to that height (Jordan *et al.*, 2005; Zakrzewski and MacFarlane, 2006).

The classification of taper models is defined by the complexity in mathematical expressions and in accordance with the number of variables and coefficients involved in the model. Thus the simplest models (Ormerod, 1973) can be distinguished taper models of variable form (Kozak, 1988; Newnhan, 1990) and segmented polynomial models (Bruce *et al.*, 1968; Max and Burkhart, 1976; Cao *et al.*, 1980). Additionally, compatibility of the taper-volume systems is defined by the integration of the taper equation and the volume equation is obtained; thus, for a merchantable volume equation there is intrinsically a taper function (Clutter, 1980; Crecente-Campo *et al.*, 2009).

Fitness of a system of simultaneous equations can be complemented with the addition of random effects with mixed effects models (MEM), which permits controlling the individual random variation of the tree and displacing the problems of heterocedasticity and autocorrelation; it is also possible to use estimates of the random effects to have precise predictions of new observations (Fang and Bailey, 2001; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

The objectives of this study were to fit three compatible systems of taper and merchantable volume as simultaneous equations for *Pinus arizonica* Engelm., *Pinus ayacahuite* Ehrenb., *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus leiophylla* Schlecht Cham and *Pinus teocote* Schlecht *et* Cham, in an area of Durango, Mexico, and fit the system of Fang *et al.* (2000) without differentiating between species

Los objetivos de este estudio fueron ajustar tres sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial como ecuaciones simultáneas para *Pinus arizonica* Engelm., *Pinus ayacahuite* Ehrenb., *Pinus durangensis* Martínez, *Pinus leiophylla* Schlecht Cham y *Pinus teocote* Schlecht et Cham en un predio de Durango, México, y ajustar el sistema de Fang *et al.* (2000) sin diferenciar entre las especies (modelo reducido) y con variables indicadoras (modelo completo) para encontrar diferencias entre las especies.

MATERIALES Y MÉTODOS

Descripción del área de estudio y descripción de las variables

La base de datos se recolectó en el ejido San Diego de Tezains, al noroeste del estado de Durango, el cual presenta antecedentes de manejo forestal desde hace 45 años, tiene una superficie de 60 801.92 ha y 26 038.02 ha de producción maderable bajo manejo, y está ubicado entre 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" N y 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" O. Las variables en los sistemas de ahusamiento y volumen comercial fueron; d =diámetro a la altura h (cm), D =diámetro normal (cm), D_b =diámetro del tocón (cm), h =altura (m) desde la base del árbol hasta el punto donde se alcanza el diámetro d , H =altura total del árbol (m), h_b =altura del tocón (m), V_t =volumen total del árbol (m^3), V_c =volumen comercial (m^3) a un diámetro de punta d , V_s =volumen de la troza i (m^3) desde la base del árbol hasta la altura h , $k=\pi/40\ 000$ constante métrica cuando el diámetro es dado en centímetros y la altura en metros o $\pi/4$ cuando el diámetro y la altura son dados en metros y $z=h/H$ es la altura relativa.

Caracterización de la base de datos

La base de datos utilizada fue de 785, 413, 1081, 506 y 768 mediciones de diámetro a diferentes alturas obtenidas de 46, 26, 69, 30 y 51 árboles de *P. arizonica* (Pa), *P. ayacahuite* (Pay), *P. durangensis* (Pd), *P. leiophylla* (Pl) y *P. teocote* (Pt), respectivamente. Estos datos provienen del análisis troncal de árboles dominantes-codominantes, intermedios y suprimidos seleccionados de acuerdo con la caracterización diámetrica y distribuidos de manera aleatoria en todo el predio para cubrir la variabilidad de los perfiles de los fustes de las diferentes especies para generar el sistema biométrico local. Los datos se obtuvieron derribando el árbol a la altura mínima posible del tocón; la primera sección se obtuvo a 30 cm del suelo, la segunda a 60 cm y la tercera en el diámetro normal (1.30 m). Las secciones se obtuvieron cada

(reduced model) and with dummy variables (full model) to find differences between species.

MATERIALS AND METHODS

Description of the study area and description of variables

The database was collected in the Ejido San Diego de Tezains, northwest of the state of Durango, which presents a history of forest management for 45 years, it has an area of 60 801.92 ha and 26 038.02 ha of timber production under management, and is located between 24° 48' 16.98", 25° 13' 47.25" N and 105° 53' 09.81", 106° 12' 52.58" W. The variables in the taper-merchantable volume systems were; d =height diameter h (cm), D =diameter at breast height (cm), D_b =stump diameter (cm), h =height (m) from the base of the tree to the point where the diameter d is reached, H =total tree height (m), h_b =stump height (m), V_t =total tree volume (m^3), V_c =merchantable volume (m^3) to a tip diameter d , volume V_s =log volume i (m^3) from the base of the tree to the height h , $k=\pi/40\ 000$ metric constant when the diameter is given in centimeters and height in meters or $\pi/4$ when the diameter and height are given in meters and $z=h/H$ is the relative height.

Characterization of database

Database used was of 785, 413, 1081, 506 and 768 diameter measurements at different heights obtained from 46, 26, 69, 30 and 51 trees of *P. arizonica* (Pa), *P. ayacahuite* (Pay), *P. durangensis* (Pd), *P. leiophylla* (Pl) and *P. teocote* (Pt), respectively. These data are from the trunk analysis of dominant-codominant, intermediate and suppressed trees selected according to the diameter characterization and randomly distributed throughout the field to cover the variability of profiles of the stems of different species to generate the local biometric system. Data were obtained by felling the tree at the minimum possible stump height; the first section was obtained at 30 cm from the ground, the second at 60 cm and the third at the diameter at breast height (1.30 m). The sections were obtained every 2 m up to the top of the tree. In each log diameter and length (l) were measured and the area of the base (g_1) and the tip (g_2) were calculated. Logs volumes were calculated with the Smalian formula $\left(V_s = \frac{g_1 + g_2}{2} l\right)$ and the end part with that of the cone $\left(V_s = \frac{g_b}{3} l\right)$, where g_b is the area of the base of such cone and l its height. Figure 1 shows the trends of data of species studied.

2 m hasta la punta del árbol. En cada troza se midieron los diámetros y longitud (l) y se calculó el área de la base (g_1) y la punta (g_2). Los volúmenes de las trozas fueron calculados con la fórmula de Smalian $\left(V_s = \frac{g_1 + g_2}{2} l\right)$ y la parte final con la del cono $\left(V_s = \frac{g_b}{3} l\right)$, donde g_b es el área de la base de dicho cono y l su altura. En la Figura 1 se muestran las tendencias de los datos de las especies estudiadas.

Modelos utilizados

Los modelos segmentados de ahusamiento (d) y volumen comercial (V_c) fueron los desarrollados por Max y Burkhart (1976), Clark *et al.* (1991) y Fang *et al.* (2000), y se denominaron S1, S2 y S3, respectivamente (Cuadro 1).

Las variables indicadoras usadas en el modelo completo fueron consideradas como efectos aditivos a la especie de *P. durangensis*, ya que ésta presenta el mayor número de observaciones. El planteamiento de los parámetros globales del modelo fue expresado como; $I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } sp = j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$, donde I_j

representa la variable indicadora para cada especie (sp); $j=2$ *P. arizonica*, 3 *P. teocote*, 4 *P. leiophylla* y 5 *P. ayacahuite*. Los parámetros globales fueron replanteados en función de las variables indicadoras, de forma tal que α_i o β_i se pueden escribir de manera general como $\alpha_i = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}I_2 + \alpha_{i3}I_3 + \alpha_{i4}I_4 + \alpha_{i5}I_5$, o

Models utilized

Segmented taper models (d) and merchantable volume (V_c) were developed by Max and Burkhart (1976), Clark *et al.* (1991) and Fang *et al.* (2000), and were labeled S1, S2 and S3, respectively (Table 1).

The dummy variables used in the full model were considered as additive effects to the species *P. durangensis*, since it has the largest number of observations. The approach

of the global parameters of the model was expressed as;

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{if } sp = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ where } I_j \text{ represents the indicator variable for}$$

each specie (sp); $j=2$ *P. arizonica*, 3. *P. teocote*, 4. *P. leiophylla* and 5 *P. ayacahuite*. Global parameters were restated according to the indicator variables, such that α_i or β_i can be written generally as $\alpha_i = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}I_2 + \alpha_{i3}I_3 + \alpha_{i4}I_4 + \alpha_{i5}I_5$, o $\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5$, for $i=1, 2$ and 3. The full model with indicator variables only considers the significant parameters ($p \leq 0.05$) in the modeling process.

Statistical parameters used to measure the fit

The goodness of fit of the models was measured by analyzing the residuals and obtaining the statistics of the adjusted coefficient of determination (R_a^2), the root mean square error (RMSE), the coefficient of variation (CV), the absolute average

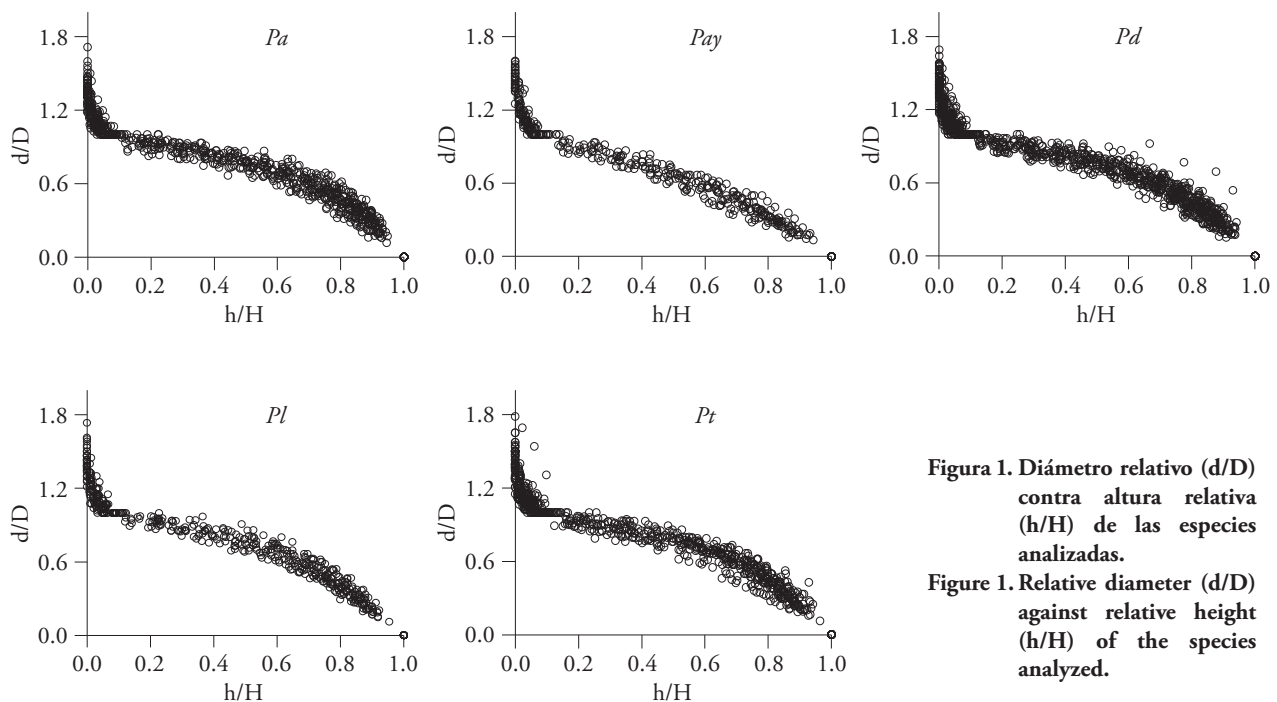


Figura 1. Diámetro relativo (d/D) contra altura relativa (h/H) de las especies analizadas.

Figure 1. Relative diameter (d/D) against relative height (h/H) of the species analyzed.

Cuadro 1. Sistemas compatibles ajustados a las especies de estudio.
Table 1. Compatible systems fitted to the species of study.

Sistema	Ecuación
S1	$d = D(\beta_0(z-1) + \beta_1(z^2-1) + \beta_2(\rho_1-z)^2 I_1 + \beta_3(\rho_2-z)^2 I_2)^{0.5}$ $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq \rho_1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq \rho_2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$ $V_c = kD^2 \left\{ \frac{\beta_1}{2} \left[\left(\frac{h^2}{H} - h \right) - \left(\frac{h_b^2}{H} - h_b \right) \right] + \frac{\beta_2}{3} \left[\left(\frac{h^3}{H^2} - h \right) - \left(\frac{h_b^3}{H^2} - h_b \right) \right] + \right. \\ \left. \frac{\beta_3}{3} \left[\left(\rho_1 - \frac{h}{H} \right)^3 I_1 H - \left(\rho_1 - \frac{h_b}{H} \right)^3 I_1 H \right] + \frac{\beta_4}{3} \left[\left(\rho_2 - \frac{h}{H} \right)^3 I_2 H - \left(\rho_2 - \frac{h_b}{H} \right)^3 I_2 H \right] \right\}$
S2	$d = \left\{ \begin{aligned} & I_S \left[D^2 \left(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 / D^3 ((1-h/H)^{\alpha_0} - (1-1.30/H)^{\alpha_0})}{1 - (1-1.30/H)^{\alpha_0}} \right) \right] + \\ & I_B \left[D^2 - \frac{(D^2 - F^2)((1-1.30/H)^{\beta_0} - (1-h/H)^{\beta_0})}{(1-1.30/H)^{\beta_0} (1-5.30/H)^{\beta_0}} \right] + \\ & I_T \left[F^2 \left(\beta_2 \left(\frac{h-5.30}{H-5.30} - 1 \right)^2 + I_M \left(\frac{1-\beta_2}{\beta_1^2} \right) \left(\beta_1 - \frac{h-5.30}{H-5.30} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \right\}$ $I_S = \begin{cases} 1 & \text{si } h \leq 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_B = \begin{cases} 1 & \text{si } 1.30 \leq h < 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_T = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_M = \begin{cases} 1 & \text{si } h < (5.30 + \beta_2(H-5.30)) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $V_c = \left\{ \begin{aligned} & I_1 D^2 \left[(1-GW)(U_1-L_1) + \frac{W((1-L_1/H)^{\alpha_0}(H-L_1) - (1-U_1/H)^{\alpha_0}(H-U_1))}{(\beta_0+1)} \right] + \\ & I_2 I_3 \left[T(U_2-L_2) + \frac{q((1-L_2)^{\beta_0}(H-L_2) - (1-U_2/H)^{\beta_0}(H-U_2))}{(\beta_0+1)} \right] + \\ & I_4 F^2 \left[\frac{\beta_2(U_2-L_2) - \frac{\beta_2((U_3-5.30)^2 - (L_3-5.30)^2)}{(H-5.30)} + \frac{\beta_2/3((U_3-5.30)^3 - (L_3-5.30)^3)}{(H-5.30)^2}}{(H-5.30)^2} \right. \\ & \left. - \frac{I_5/3(1-\beta_2/\beta_1^2)(\beta_1(H-5.30) - (L_3-5.30))^3}{(H-5.30)^2} - \frac{I_6/3(1-\beta_2/\beta_1^2)(\beta_1(H-5.30) - (U_3-5.30))^3}{(H-5.30)^2} \right] \end{aligned} \right\}$ $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } h_b < 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } h_b < 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 1.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 5.30 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases},$ $I_5 = \begin{cases} 1 & \text{si } (L_3-5.30) < \beta_2(H-5.30) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_6 = \begin{cases} 1 & \text{si } (U_3-5.30) < \beta_2(H-5.30) \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad G = (1-1.30/H)^{\alpha_0},$ $W = (\alpha_1 + \alpha_2/D^3)/(1-G), \quad x = (1-1.30/H)^{\beta_0}, \quad y = (1-5.30/H)^{\beta_0}, \quad q = \frac{(D^2 - F^2)}{(x-y)},$ $T = D^2 - zx, \quad L_1 = \max(h_b, 0), \quad L_2 = \max(h_b, 1.30), \quad L_3 = \max(h_b, 5.30), \quad U_1 = \min(h, 1.30), \quad U_2 = \min(h, 5.30),$ $U_3 = \min(h, H) \quad \text{y} \quad F = D(\Phi_1 + \Phi_2(5.30/H))^2$
S3	$d = c_1 (H^{(K-\beta_1)/\beta_1} (1-z)^{(K-R)/R} A_1^{(I_1+I_2)} A_2^{I_2})^{0.5}$ $c_1 = (\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{(\alpha_2-K)/\beta_1} / [\beta_1(t_0-t_1) + \beta_2(t_1-A_1 t_2) + \beta_3 A_1 t_2])^{0.5},$ $t_0 = (1-\rho_0)^{K/\beta_1}, \quad \rho_0 = H_b/H, \quad t_1 = (1-\rho_1)^{K/\beta_1}, \quad t_2 = (1-\rho_2)^{K/\beta_2}$ $A_1 = (1-\rho_1)^{(\beta_2-\beta_1)K/\beta_1\beta_2}, \quad A_2 = (1-\rho_2)^{(\beta_3-\beta_2)K/\beta_2\beta_3}, \quad R = \beta_1^{1-(I_1+I_2)} \beta_2^{I_1} \beta_3^{I_2}$ $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_1 \leq z \leq \rho_2 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_2 < z < 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad \rho_1 = h_1/H \quad \text{y} \quad \rho_2 = h_2/H.$ $V_c = c_1^2 H^{(k/\beta_1)} [\beta_1 t_0 + (I_1 + I_2)(\beta_2 - \beta_1)t_1 + I_2(\beta_3 - \beta_2)A_1 t_2 - R(1-z)^{k/R} A_1^{I_1+I_2} A_2^{I_2}]$

$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}I_2 + \beta_{i3}I_3 + \beta_{i4}I_4 + \beta_{i5}I_5$, para $i=1, 2$ y 3 . El modelo completo con variables indicadoras sólo considera los parámetros significativos ($p \leq 0.05$) en el proceso de modelado.

Parámetros estadísticos utilizados para medir el ajuste

La bondad de ajuste de los modelos se midió a través del análisis de los residuales y con la obtención de los estadísticos como el coeficiente de determinación ajustado (R_a^2), la raíz del cuadrado medio del error ($RMSE$), el coeficiente de variación (CV), el sesgo promedio absoluto (SP) y el criterio de información de Akaike (AIC) (Lu y Zhang, 2011). Para comparar el modelo completo contra el modelo reducido se usó la prueba de F generalizada (Washington *et al.*, 2011).

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n-1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (1)$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \right]^{0.5} \quad (2)$$

$$CV = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - 1 \right]^{0.5}}{\hat{y}} \times 100 \quad (3)$$

$$SP = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right| \quad (4)$$

$$AIC = n / n \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n \right] + 2p \quad (5)$$

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_F}{SSE_F / df_F} \quad (6)$$

donde y_i , $\hat{y}_i$ e $\bar{y}$ son los valores observados, predichos y promedio de la variable dependiente, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo, F^* es el valor de la prueba estadística con distribución F , SSE_R y SSE_F son la suma de cuadrados del error de los modelos reducido y completo, y df_R y df_F son los grados de libertad del error.

Metodología de ajuste de los modelos

Los sistemas compatibles pueden ser ajustados por mínimos cuadrados ordinarios (OLS), ajustados de forma

bias (SP) and the Akaike information criterion (AIC) (Lu and Zhang, 2011). To compare the full model with the reduced model, the generalized F test (Washington *et al.*, 2011) was used.

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{n-1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \quad (1)$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \right]^{0.5} \quad (2)$$

$$CV = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - 1 \right]^{0.5}}{\hat{y}} \times 100 \quad (3)$$

$$SP = \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right| \quad (4)$$

$$AIC = n / n \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n \right] + 2p \quad (5)$$

$$F^* = \frac{(SSE_R - SSE_F) / df_R - df_F}{SSE_F / df_F} \quad (6)$$

where y_i , $\hat{y}_i$ and $\bar{y}$ are the observed values, predicted and average of the dependent variable, n is the number of observations, p is the number of model parameters, F^* is the value of the statistical test with distribution F , SSE_R and SSE_F are the sum of squared error of the reduced and full models, and df_R and df_F are the degrees of freedom of the error.

Models fit methodology

Compatible systems can be fitted by minimum ordinary least squares (OLS), fitted simultaneously with full information maximum likelihood (FIML) or seemingly unrelated regression (SUR). The FIML or the SUR method represent consistent estimators for equations of the system, which represents an advantage over OLS, since in the latter case it must be decided whether the error is minimized in taper equation or in the merchantable volume (Fang *et al.*, 2000; Brooks *et al.*, 2008; Cruz-Cobos *et al.*, 2008). For system 2 the diameter d_i was estimated up to 5.30 m with the model proposed by Clark *et al.* (1991), which was fitted globally for all species.

The models were fitted simultaneously for components of taper and merchantable volume with the procedure Model SAS/ETS by FIML technique; so the fit was optimized on the

simultánea con máxima verosimilitud con información completa (FIML) o con regresión aparentemente no relacionada (SUR). El método FIML o el SUR representan estimadores consistentes para las ecuaciones del sistema, lo cual representa una ventaja sobre el OLS, ya que en este último caso se debe decidir si se minimiza el error en la ecuación de ahusamiento o en el volumen comercial (Fang *et al.*, 2000; Brooks *et al.*, 2008; Cruz-Cobos *et al.*, 2008). Para el sistema 2 se estimó el diámetro d_i a la altura de 5.30 m con el modelo propuesto por Clark *et al.* (1991), el cual fue ajustado de forma global para todas las especies.

Los modelos fueron ajustados de forma simultánea para los componentes de ahusamiento y volumen comercial con el procedimiento Model SAS/ETS por la técnica FIML; así el ajuste, se optimizó sobre la predicción de parámetros (SAS Institute Inc., 2011). El modelo reducido y el completo fueron ajustados con diámetros medidos en metros, para sensibilizar las diferencias de los parámetros entre las especies.

Multicolinealidad, autocorrelación y heterocedasticidad

La presencia de multicolinealidad entre las variables de los sistemas analizados fue evaluada con el número de la condición (CN), que se define como la raíz cuadrada del cociente entre el mayor y el menor autovalor de la matriz de correlación. De acuerdo con Belsey (1991), si el CN está dado por el intervalo 5-10 la colinealidad no representa problema, si se encuentra entre 30-100 existen problemas asociados de multicolinealidad, y si se encuentra entre 100 y 3000 hay fuertes problemas asociados a la multicolinealidad de variables. Los problemas de autocorrelación en el componente de ahusamiento se corrigieron con una estructura de errores autorregresiva modificada $CAR(2)$, la cual consideró la distancia entre las mediciones de la altura comercial en cada uno de los árboles (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001), y dicha estructura es dada por (7).

$$e_{ij} = d_1 \gamma_1^{h_{ij}-h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \gamma_2^{h_{ij}-h_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

donde e_{ij} es el residual ordinario en el árbol i , $d_i=1$ para $j>1$ y $d_i=0$ para $j=1$, γ_i es el parámetro autorregresivo de orden i , y $h_{ij}-h_{ij-1}$ es la distancia de separación de la j a la $j-1$ observación dentro de cada árbol, $h_{ij}>h_{ij-1}$.

La estructura de error $CAR(2)$ fue programada en el procedimiento MODEL de SAS/ETS™ (SAS institute Inc., 2011), que permite la actualización dinámica de los residuales y sensibilizó las pruebas de hipótesis de los parámetros en los sistemas ajustados, y con esta estructura se probaron las diferencias de las

prediction of parameters (SAS Institute Inc., 2011). The reduced and full models were fitted with diameters measured in meters, to sensitize parameter differences between species.

Multicollinearity, autocorrelation and heterocedasticity

The presence of multicollinearity between the variables of analyzed systems was evaluated with the condition number (CN), which is defined as the square root of the ratio between the largest and smallest eigenvalue of the correlation matrix. According to Belsey (1991), if the CN is given by the interval 5-10 collinearity is not a problem, if it is between 30-100, there are associated problems of multicollinearity, and if it is between 100 and 3000 there are serious problems associated with the multicollinearity of variables. The problems of autocorrelation in the taper component were corrected with a modified structure of autoregressive errors $CAR(2)$ which considered the distance between the measurements of merchantable height in each of the trees (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001) and this structure is given by (7).

$$e_{ij} = d_1 \gamma_1^{h_{ij}-h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \gamma_2^{h_{ij}-h_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

where e_{ij} is the ordinary residual in the tree i , $d_i=1$ for $j>1$ and $d_i=0$ for $j=1$, γ_i is the autoregressive parameter of order i , and $h_{ij}-h_{ij-1}$ is the distance of separation of the j to the $j-1$ observation inside each tree, $h_{ij}>h_{ij-1}$.

The structure of error $CAR(2)$ was programmed in the procedure MODEL of SAS/ETS™ (SAS institute Inc., 2011), which allows the dynamic updating of the residuals and sensitized the hypothesis tests of parameters in the fitted systems, and with this structure the differences of dendrometric forms of the stems between species were tested simultaneously. Figure 2 shows the autocorrelation correction of errors for the taper equation. The problem of heterocedasticity associated with the merchantable volume was corrected with a power function of the variance of the residual $\sigma_i^2 = (D^2 H)^\phi$ with D and H as independent variables (Crecente-Campo *et al.*, 2009). The fair value of the exponential term ϕ should provide the most homogeneous graph of standardized residuals (Huang *et al.*, 2000). The estimated error of the unweighted model ($\hat{\varepsilon}_i$) was used as the dependent variable in the variance of the model error ($\hat{\varepsilon}_i^2 = \phi_0 (D^2 H)^{\phi_1}$). The parameters were estimated and programmed in the procedure MODEL of SAS/ETS™ (SAS Institute Inc., 2011), with the specification $resid.V_c = resid.V_c / [(D^2 H)^\phi]^{0.5}$.

formas dendrométricas de los fustes entre las especies de manera simultánea. La Figura 2 muestra la corrección de la autocorrelación de los errores para la ecuación de ahusamiento. El problema de heterocedasticidad asociada al volumen comercial fue corregido con una función de potencia de la varianza del residual $\sigma_i^2 = (D^2 H)^\phi$ con el D y la H como variables independientes (Crecente-Campo *et al.*, 2009). El valor más razonable del término exponencial ϕ debería proveer la gráfica más homogénea de residuales estandarizados (Huang *et al.*, 2000). El error estimado del modelo no ponderado ($\hat{\epsilon}_i$) fue usado como la variable dependiente en la varianza del error del modelo ($\hat{\epsilon}_i^2 = \phi_0 (D^2 H)^{\phi_1}$). Los parámetros fueron estimados y programados en el procedimiento MODEL de SAS/ETS™ (SAS Institute Inc., 2011), con la especificación $\text{resid. } V_c = \text{resid. } V_c / [(D^2 H)^\phi]^{0.5}$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el Cuadro 2 se presentan los estimadores de los parámetros y sus respectivos errores estándar para los sistemas compatibles ajustados a las especies de estudio. Todos los parámetros fueron significativos ($p \leq 0.01$). En el Cuadro 3 se muestran los estadísticos de bondad de ajuste, la condición del número (CN) y la prueba de Durbin-Watson (DW) como medida de la corrección de la autocorrelación en el modelo de ahusamiento (Durbin y Watson, 1971).

El sistema compatible desarrollado por Fang *et al.* (2000) presenta ventajas en los estadísticos de ajuste comparado con los sistemas desarrollados por Max y Burkhart (1976) y Clark *et al.* (1991). El sistema de Fang *et al.* (2000) es muy plausible para la descripción de las formas de los fustes y su implementación se incorpora de manera sencilla en los sistemas biométricos para la elaboración y ejecución de programas de manejo forestal (Corral-Rivas *et al.*, 2007). Para algunas especies el S2 es mejor que el S3, pero el S3 tiene mejor parsimonia en la expresión matemática, no restringe los puntos de inflexión y presenta menor grado de colinealidad que S1. El ajuste de los componentes de ahusamiento y volumen comercial de manera compatible permitió distribuir de forma porcentual el volumen por productos y eliminar las incompatibilidades de ajustar los componentes por separado (Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Hernández *et al.*, 2013).

El modelo reducido considera la forma de los fustes menos cilíndricos, ya que el segundo punto de inflexión sucede al 73 % de la altura total con relación al promedio obtenido para el ajuste individual

RESULTS AND DISCUSSION

Estimators of parameters and their respective standard errors for compatible systems fitted to species of the study are presented in Table 2. All parameters were significant ($p \leq 0.01$). Table 3 shows the statistics of goodness of fit, the condition number (CN) and the Durbin-Watson test (DW) as a measure of the autocorrelation correction in the taper model (Durbin and Watson, 1971).

The compatible system developed by Fang *et al.* (2000) presents advantages in statistics of fit compared to systems developed by Max and Burkhart (1976) and Clark *et al.* (1991). Fang *et al.* (2000) system is very plausible for describing the shapes of stems and their implementation is easily incorporated into biometric systems for the development and implementation of forest management programs (Corral-Rivas *et al.*, 2007). For some species S2 is better than S3, but S3 has better parsimony in mathematical expression, it does not restrict the inflection points and presents lesser degree of collinearity than S1. Fitting the components of taper and merchantable volume in a compatible way allowed to distribute in a percent way the volume by products and remove incompatibilities of fitting the components separately (Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Hernández *et al.*, 2013).

The reduced model considers the shape of less cylindrical stems, since the second inflection point occurs at 73 % of the total height with regard to

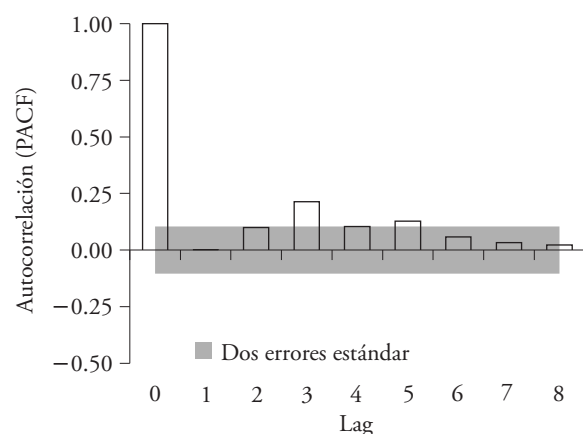


Figura 2. Autocorrelación parcial del modelo completo con la estructura $CAR(2)$ en la ecuación de ahusamiento.

Figure 2. Partial autocorrelation of the full model with the structure $CAR(2)$ in the taper equation.

Cuadro 2. Parámetros, estimadores y errores estándar de los parámetros de los sistemas ajustados.
Table 2. Parameters, estimators and standard errors of the parameters of the fitted systems.

Sistema		Estimadores y errores estándar										
		α_0	α_1	α_2	β_0	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2
S1	θ_i				-8.893	4.290	310.2	-4.684	0.048	0.866	0.727	0.336
	ε_i				2.911	1.550	24.2	1.533	0.002	0.027	0.038	0.036
	θ_i				-4.397	2.122	396.4	-1.681	0.047	0.803	0.723	0.198
	ε_i				1.572	0.855	26.9	0.828	0.002	0.074	0.053	0.033
	θ_i				-7.061	3.362	580.9	-3.552	0.035	0.847	0.666	0.265
	ε_i				1.845	0.988	35.0	0.970	0.001	0.028	0.035	0.026
	θ_i				-6.431	3.139	814.8	-3.361	0.029	0.797	0.731	0.273
	ε_i				1.442	0.786	65.3	0.756	0.001	0.036	0.060	0.040
	θ_i				-8.032	3.878	784.3	-4.085	0.028	0.855	0.632	0.261
	ε_i				2.734	1.459	59.87	1.441	0.001	0.033	0.047	0.033
S2	θ_i	19.108	0.731	1785.3	0.677	0.825	4.595				0.670	0.486
	ε_i	1.553	0.012	180.4	0.022	0.014	0.290				0.032	0.045
	θ_i	34.276	1.047	1027.9	0.781	0.634	2.148				0.762	0.298
	ε_i	2.363	0.021	509.7	0.026	0.044	0.139				0.032	0.045
	θ_i	16.997	0.789	2163.9	0.719	0.776	3.712				0.641	0.389
	ε_i	1.142	0.012	142.5	0.027	0.013	0.157				0.030	0.036
	θ_i	21.433	0.830	2228.7	0.820	0.690	2.505				0.648	0.333
	ε_i	1.837	0.010	216.4	0.069	0.023	0.117				0.044	0.067
	θ_i	11.333	0.707	2958.1	0.607	0.777	3.661				0.668	0.458
	ε_i	1.043	0.015	159.1	0.026	0.020	0.234				0.036	0.047
S3	θ_i	8.2×10^{-5}	1.936	0.865		5.9×10^{-6}	4.2×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.045	0.706	0.606	0.271
	ε_i	1.1×10^{-6}	0.006	0.009		1.5×10^{-7}	5.6×10^{-7}	8.2×10^{-7}	0.001	0.016	0.051	0.039
	θ_i	3.5×10^{-5}	1.914	1.130		4.8×10^{-6}	3.3×10^{-5}	2.9×10^{-5}	0.041	0.723	0.676	0.166
	ε_i	1.6×10^{-6}	0.014	0.022		9.8×10^{-8}	4.8×10^{-7}	1.7×10^{-6}	0.001	0.067	0.055	0.031
	θ_i	7.1×10^{-5}	1.948	0.895		6.1×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.047	0.709	0.592	0.183
	ε_i	9.0×10^{-7}	0.004	0.006		1.2×10^{-7}	4.6×10^{-7}	7.4×10^{-7}	0.001	0.014	0.040	0.028
	θ_i	9.4×10^{-5}	2.029	0.696		5.5×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.0×10^{-5}	0.044	0.613	0.585	0.204
	ε_i	1.6×10^{-6}	0.007	0.008		1.5×10^{-7}	7.3×10^{-7}	8.5×10^{-7}	0.001	0.022	0.069	0.046
	θ_i	8.5×10^{-5}	1.908	0.880		6.1×10^{-6}	4.0×10^{-5}	3.1×10^{-5}	0.046	0.698	0.517	0.191
	ε_i	1.3×10^{-6}	0.011	0.012		1.8×10^{-7}	6.2×10^{-7}	9.0×10^{-7}	0.002	0.015	0.059	0.033

Donde θ_i es el estimador del parámetro, ε_i es el error estándar del parámetro, Pu es *Pinus arizonica*, Pay es *Pinus ayacahuite*, Pd es *Pinus durangensis*, Pl es *Pinus leiophylla*, Pt es *Pinus teocote*.
Where θ_i is the estimator of the parameter, ε_i is the standard error of the parameter, Pu is *Pinus arizonica*, Pay is *Pinus ayacahuite*, Pd is *Pinus durangensis*, Pl is *Pinus leiophylla*, Pt is *Pinus teocote*.

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste de los sistemas analizados.
Table 3. Statistics of goodness of fit of the systems analyzed.

Especie	Sistema	Componente	Estadísticos de ajuste						
			R_a^2	RMSE	SP	CV	AIC	DW	CN
Pa	S1	d	0.986	1.505	0.157	7.190	652	1.923	1661
		V_c	0.979	0.089	0.010	16.313	-3791	-	
	S2	d	0.985	1.550	0.361	7.239	698	2.002	16
		V_c	0.994	0.047	0.006	8.577	-4797	-	
	S3	d	0.986	1.470	0.142	7.093	617	1.8238	46
		V_c	0.987	0.069	0.013	12.842	-4180	-	
Pay	S1	d	0.990	1.401	0.240	6.451	288	1.920	708
		V_c	0.991	0.054	0.012	10.317	-2405	-	
	S2	d	0.986	1.645	0.499	7.325	421	1.876	7
		V_c	0.992	0.052	0.019	9.581	-2432	-	
	S3	d	0.989	1.460	0.284	6.886	324	1.8267	68
		V_c	0.992	0.052	0.011	10.362	-2427	-	
Pd	S1	d	0.985	1.432	0.087	7.402	787	1.955	1258
		V_c	0.989	0.050	0.0001	12.737	-6470	-	
	S2	d	0.982	1.554	0.431	7.728	963	1.956	14
		V_c	0.997	0.027	0.007	6.604	-7822	-	
	S3	d	0.985	1.426	0.218	7.408	780	1.9145	41
		V_c	0.992	0.042	0.008	10.639	-6862	-	
Pl	S1	d	0.988	1.389	0.032	6.647	342	1.928	526
		V_c	0.985	0.084	0.010	14.768	-2502	-	
	S2	d	0.988	1.390	0.319	6.476	343	2.010	9
		V_c	0.995	0.046	0.007	8.147	-3100	-	
	S3	d	0.990	1.295	0.172	6.242	273	2.0082	58
		V_c	0.997	0.038	0.013	6.866	-3287	-	
Pt	S1	d	0.981	1.636	0.050	8.230	767	2.039	1336
		V_c	0.983	0.063	0.004	16.445	-4242	-	
	S2	d	0.980	1.689	0.474	8.153	815	2.020	15
		V_c	0.996	0.030	0.006	7.586	-5399	-	
	S3	d	0.982	1.578	0.247	7.975	712	1.9877	53
		V_c	0.995	0.034	0.006	8.902	-5191	-	

por especie (Cuadro 4). En el Cuadro 5 se presentan los estimadores de los parámetros, sus errores estándar y los estadísticos de ajuste para el ahusamiento y volumen comercial de manera global. El diámetro expresado en metros permitió obtener los coeficientes de las formas dendrométricas de manera directa.

El modelo completo que describe la diferencia entre los parámetros del volumen total de fuste y los que describen la forma del ahusamiento resultó mejor ($p \leq 0.01$) que el modelo reducido, de acuerdo con la prueba de F generalizada (Washington *et al.*, 2011) y los estadísticos usados para medir el ajuste.

the average obtained for the individual fit of each species (Table 4). Estimators of the parameters, their standard errors and fit statistics for the taper and merchantable volume are globally presented in Table 5. The diameter expressed in meters permitted to obtain the coefficients of the dendrometric shapes directly.

The full model that describes the difference between the parameters of total stem volume and those describing the shape of the taper was better ($p \leq 0.01$) than the reduced model, according to the generalized F test (Washington *et al.*, 2011) and statistics used to measure the fitness.

Cuadro 4. Estimadores, errores estándar de los parámetros y estadísticos de ajuste del modelo reducido del Sistema 3.**Table 4. Estimators, standard errors of the parameters and fit statistics of the reduced model of System 3.**

Estadístico	Estimadores, error estándar y estadísticos de ajuste									
	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	ρ_1	ρ_2	γ_1	γ_2
θ_i	0.642	1.953	0.845	0.062	0.388	0.306	0.048	0.731	0.725	0.285
ε_i	0.019	0.006	0.008	0.001	0.002	0.005	0.001	0.008	0.018	0.016
Componente	R_a^2	$RMSE$		SP		CV		AIC		
d	0.9840	0.0156		2.6E-03		7.77		-29532		
V_c	0.9909	0.0532		7.7E-03		11.60		-20830		

Donde θ_i es el estimador del parámetro, ε_i es el error estándar del parámetro ❖ where θ_i is the parameter estimator, ε_i is the standard error of the parameter.

Cuadro 5. Estimadores, errores estándar de los parámetros y estadísticos de ajuste del modelo completo del Sistema 3.**Table 5. Estimators, standard errors of the parameters and fit statistics of the full model of System 3.**

Parámetro	Propiedades de los estimadores y estadísticos de ajuste									
	θ_i	ε_i	t	$Pr> t $	Comp	R_a^2	$RMSE$	SP	CV	AIC
$\alpha_0(d)$	0.6722	0.0183	36.74	<.0001	d	0.9857	0.0148	2.7×10^{-3}	7.35	-29914
$\alpha_0(ay)$	-0.3103	0.0208	-14.95	<.0001						
$\alpha_0(l)$	0.1916	0.0295	6.51	<.0001						
$\alpha_0(t)$	-0.0388	0.0071	-5.45	<.0001						
$\alpha_1(d)$	1.9872	0.0058	341.89	<.0001						
$\alpha_1(a)$	-0.0172	0.0027	-6.45	<.0001						
$\alpha_1(t)$	-0.0507	0.0085	-5.98	<.0001						
$\alpha_2(d)$	0.8477	0.0075	112.37	<.0001						
$\alpha_2(ay)$	0.1649	0.0164	10.03	<.0001						
$\alpha_2(l)$	-0.0875	0.0118	-7.43	<.0001						
$\beta_1(d)$	0.0634	0.0010	63.75	<.0001	V_c	0.9924	0.0486	5.4×10^{-3}	10.58	-21470
$\beta_1(ay)$	-0.0080	0.0014	-5.68	<.0001						
$\beta_2(d)$	0.3926	0.0023	170.31	<.0001						
$\beta_2(a)$	0.0221	0.0037	5.95	<.0001						
$\beta_2(ay)$	-0.0667	0.0042	-16.05	<.0001						
$\beta_3(d)$	0.3120	0.0044	71.49	<.0001						
$\beta_3(l)$	-0.0467	0.0086	-5.43	<.0001						
ρ_1	0.0485	0.0007	64.87	<.0001						
ρ_2	0.7254	0.0071	102.63	<.0001						
γ_1	0.6689	0.0198	33.72	<.0001						
γ_2	0.2484	0.0153	16.24	<.0001						

El modelo completo con variables indicadoras (Cuadro 5) muestra a *P. arizonica* con los fustes más cilíndricos (factor de forma, $ff=0.528$ para el segmento medio, calculado como $ff=\beta_{2(i)}k^{-1}$) y a *P. ayacahuite* con los fustes más cónicos ($ff=0.415$), mientras que *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote* presentan fustes estadísticamente no diferentes y

The full model with dummy variables (Table 5) shows *P. arizonica* with the more cylindrical stems (form factor, $ff=0.528$ for the middle segment, calculated as $ff=\beta_{2(i)}k^{-1}$) and *P. ayacahuite* with the more conical stems ($ff=0.415$), whereas *P. durangensis*, *P. leiophylla* and *P. teocote* show stems which are statistically no different and with

con forma de paraboloides casi perfecta ($ff=0.499$). Esta cualidad responde a las características de la poda natural; en contraste, *P. ayacahuite* presenta menor poda natural. Es razonable suponer que se debe al historial de aprovechamientos forestales en el área de estudio con manejo regular e irregular, el cual es similar en la región forestal de Santiago Papasquiaro, Durango.

El modelo completo asume fustes menos esbeltos que el modelo reducido, de acuerdo con los puntos de inflexión (Cuadro 5). El modelo completo con variables indicadoras presenta ventajas importantes en cuanto al modelo reducido, ya que el primero asume las diferencias en los parámetros de la ecuación de volumen total (Schumacher y Hall, 1933) y las diferencias en los parámetros que definen el ahusamiento y volumen comercial. Corral-Rivas *et al.* (2007) compararon el ajuste del modelo de ahusamiento de Fang *et al.* (2000) para todos los pares de cinco especies forestales (*P. cooperi*, *P. durangensis*, *P. engelmannii*, *P. leiophylla* y *P. teocote*), y reportan 10 comparaciones (modelos completos) y diferencias para todos los casos entre el modelo completo y el modelo reducido. La estrategia del presente estudio fue encontrar las diferencias entre todas las especies. Así, el modelo completo describe las diferencias por adición a *P. durangensis* de los parámetros que describen la forma del ahusamiento y volumen total y comercial. Los parámetros con adiciones no significativas ($p>0.05$) fueron estadísticamente similares.

En la Figura 3 se muestra la distribución de los residuales en forma de gráficas de caja y alambre del modelo completo, el componente de ahusamiento (d) expresado por categorías de porcentaje a la altura relativa (h/H) y el volumen comercial (V_c) expresado por categoría diamétrica (CD).

La distribución de los residuales, por categorías de altura relativa para el ahusamiento y por categorías de diámetro (5 cm) para el volumen, indican que el modelo completo es muy preciso cuando se quiere obtener volumen comercial a diámetros de punta de hasta 25 cm, y que su aplicación no es práctica en diámetros y alturas por abajo del diámetro normal. Corral-Rivas *et al.* (2007) encontraron una distribución muy cercana al 0 para el ahusamiento de las especies estudiadas de la región de El Salto, Durango, México; sin embargo, no presentan la categoría relativa de alturas del 10 %, para la cual se encontraron los errores más altos en el presente estudio.

paraboloidal shape almost perfect ($ff=0.499$). This attribute corresponds to the characteristics of natural pruning; in contrast, *P. ayacahuite* has less natural pruning. It is reasonable to assume that it is due to the history of forest harvesting in the study area with even-aged and uneven-aged management regimes, which is similar to the forest region of Santiago Papasquiaro, Durango.

The full model assumes thinner stems than the reduced model, according to the inflection points (Table 5). The full model with dummy variables has significant advantages compared to the reduced model, since the former assumes the differences in the parameters of the equation of total volume (Schumacher and Hall, 1933) and differences in the parameters that define the taper and merchantable volume. Corral-Rivas *et al.* (2007) compared the taper model fit of Fang *et al.* (2000) for all pairs of five forest species (*P. cooperi*, *P. durangensis*, *P. engelmannii*, *P. leiophylla* and *P. teocote*) and reported 10 comparisons (full models) and differences for all cases between the full and the reduced model. The strategy of our study was to find the differences among all species. Thus, the full model describes the differences by addition to *P. durangensis* of the parameters describing the shape of the taper and total and merchantable volume. Parameters with no significant additions ($p>0.05$) were statistically similar.

Figure 3 shows the distribution of residuals in form of wire and box plots of the full model, the taper component (d), expressed in percentage categories at the relative height (h/H) and the merchantable volume (V_c) expressed by diameter category (CD).

The distribution of residuals, by categories of relative height for taper and by categories of diameter (5 cm) for volume, indicate that the full model is very accurate when one wants to obtain merchantable volume at tip diameters up to 25 cm, and that its application is not practical in diameters and heights below the diameter at breast height. Corral-Rivas *et al.* (2007) found a distribution very close to 0 for taper of the species studied in the region of El Salto, Durango, Mexico; however, they do not present the relative category of heights of 10 %, for which the highest errors in our study were found.

The full model was fitted under the approach of Mixed Effects Models (MEM) with a bivariate formulation and a random effect due to the tree.

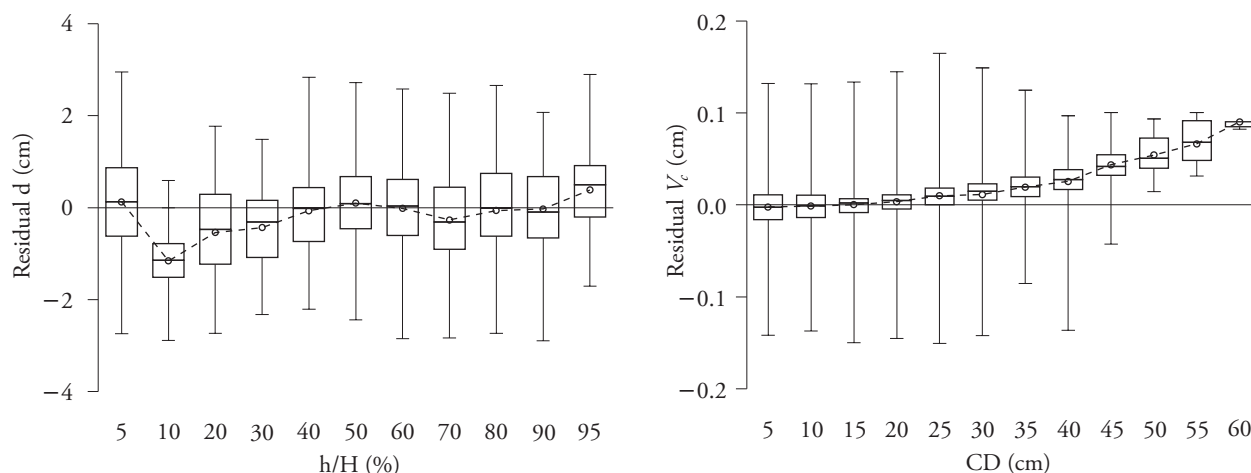


Figura 3. Distribución de los residuales para el ahusamiento y volumen comercial del modelo completo, “o” es la media y “-” la mediana de los residuales; las barras del error (I) representan el rango intercuartil (Q3-Q1).

Figure 3. Distribution of residuals for taper and merchantable volume of the full model, “o” is the mean and “-” the median of the residuals; the error bars (I) represent the interquartile range (Q3-Q1).

El modelo completo fue ajustado bajo el enfoque de Modelos con Efectos Mixtos (MEM), con una formulación bivariada y efecto aleatorio debido al árbol. El ajuste consideró efectos fijos y aleatorios para el parámetro que describe la forma paraboloide del fuste (β_2), con una estructura como la propuesta por Hall y Clutter (2004), la cual fue estudiada por Cruz-Cobos *et al.* (2008) y Tamarit *et al.* (2014). Sin embargo, los resultados sugieren que la estructura del modelo completo es mejor de acuerdo con los estadísticos usados, ya que el ajuste MEM minimiza el cuadrado medio del error del modelo de ahusamiento, pero no el de volumen comercial. Además, el sesgo promedio aumenta de manera considerable para el componente del volumen comercial. Por esta razón y considerando que la estructura bivariada compensa por el doble de grados de libertad, no se presentan los resultados del ajuste con MEM.

CONCLUSIONES

El sistema desarrollado por Fang *et al.* (2000), de acuerdo con los estadísticos de ajuste, fue mejor que el desarrollado por Max y Burkhart (1976) o el de Clark *et al.* (1991), por lo cual dicho sistema se puede usar como modelo completo o reducido para caracterizar el ahusamiento y volumen comercial para las especies estudiadas.

El modelo completo con variables indicadoras muestra las diferencias en el volumen total y la

The fitting considered fixed and random effects for the parameter describing the paraboloidal shape of the stem (β_2), with a structure as that proposed by Hall and Clutter (2004), which was studied by Cruz-Cobos *et al.* (2008) and Tamarit *et al.* (2014). However, results suggest that the structure of the full model is better according to statistical data used, since the MEM fit minimizes the mean squared error of the taper model, but not that of the merchantable volume. Furthermore, the average bias increases substantially for the component of the merchantable volume. For this reason and considering that the bivariate structure compensates for double the degrees of freedom, the fit results are not presented with MEM.

CONCLUSIONS

The system developed by Fang *et al.* (2000), according to the statistics of fit was better than that developed by Max and Burkhart (1976) or that of Clark *et al.* (1991), whereby such system can be used as full or reduced model to characterize taper and merchantable volume for the species studied.

The full model with indicator variables shows the differences in the total volume and stem shape for *P. arizonica*, *P. ayacahuite*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* and *P. teocote*. In the full model the taper and volume parameters are very similar for *P. durangensis*, *P. arizonica* and *P. teocote*. The

forma del fuste para *P. arizonica*, *P. ayacahuite*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote*. En el modelo completo los parámetros del volumen y ahusamiento son muy similares para *P. durangensis*, *P. arizonica* y *P. teocote*. Las similitudes se fundamentan en que estas especies comparten espacios de crecimiento, se desarrollan de forma mezclada y la silvicultura aplicada es similar. La estructura del modelo completo hace eficiente el ajuste del sistema compatible, se utilizan todos los datos en el proceso de ajuste y los errores estándar de los parámetros disminuyen. Los coeficientes de forma para el volumen total de fuste obtenidos con el modelo completo son 49 % para *P. ayacahuite* y 58 % para las demás especies.

Los sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial, con las diferentes estrategias abordadas, se centran en las condiciones de las masas mezcladas incoetáneas del área de estudio, las cuales son similares para la región forestal de Santiago Papasquiaro, Durango, pero la utilización en otras condiciones sugiere un proceso previo de validación.

AGRADECIMIENTOS

El autor principal agradece el apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para el desarrollo de los estudios de doctorado. Un agradecimiento al Postgrado en Ciencias Forestales del Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo, a la Escuela Politécnica Superior de Lugo, Universidad de Santiago de Compostela, España y al Ejido San Diego de Tezains.

LITERATURA CITADA

- Belsey, D. A. 1991. Conditioning Diagnostic, Collinearity and Weak Data in Regression. John Wiley & Sons Inc. New York. 396 p.
- Brooks, J. R., L. Jiang, and R. Özcelik. 2008. Compatible stem volume and taper equations for Brutian pine Cedar of Lebanon, and Cilicica fir in Turkey. *For. Ecol. Manage.* 256: 147-151.
- Bruce, R., L. Curtis, and C. Van Coevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. *For. Sci.* 14: 339-350.
- Cao, Q. V., H. E. Burkhart, and T. A. Max. 1980. Evaluations of two methods for cubic-foot volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26: 71-80.
- Clark, A., R. A. Souter, and B. E. Schalaegel. 1991. Stem profile equations for southern tree species. USDA For. Serv. Res. Pap. SE-282. Atlanta, GA, USA. 113 p.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. Timber Management. Wiley, New York, USA. 333 p.
- Corral-Rivas, J. J., U. Diéguez-Aranda, S. Corral R., and F. Castedo D. 2007. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (México). *For. Ecol. Manage.* 238: 118-129.
- Corral-Rivas, S., y J. J. Nívar-Chaidez. 2009. Comparación de técnicas de estimación de volumen fustal total para cinco especies de Durango, México. *Rev. Chapingo Serie Ciencias For. y del Ambiente* 15: 5-13.
- Crecente-Campo, F., A. Rojo A., and U. Diéguez-Aranda. 2009. A merchantable volume system for *Pinus sylvestris* L. in the major mountains ranges of Spain. *Ann. For. Sci.* 66 (808): 1-12.
- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, y J. R. Valdéz-Lazalde, 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango México. *Agrociencia* 42: 473-485.
- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58: 1-19.
- Fang, Z., and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47(3): 287-300.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for Loblolly and Slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46(1): 1-12.
- Hall, D. B., and M. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Hernández P., D., H. M. De los Santos P., G. Ángeles P., J. R. Valdez L. y V. H. Volke H. 2013. Funciones de ahusamiento

—End of the English version—



- y volumen commercial para *Pinus patula* Schltdl. et Cham. En Zacualtipán Hidalgo. Rev. Mex. Cien. For. 4(16): 35-45.
- Huang, S., D. Price, and S. J. Titus. 2000. Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests. For. Ecol. Manage. 129: 125-141.
- Jordan, L., K. Berenhaut, R. Souter, and R. F. Daniels. 2005. Parsimonious and completely compatible taper, total and merchantable volume models. For. Sci. 51(6): 578-584.
- Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. Can. J. For. Res., 18: 1363-1368.
- Lu, J., and L. Zhang. 2011. Modeling of tree height-diameter relationships using spatial autoregressive models. For. Sci. 57(3): 252-264.
- Max, T. A., and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. For. Sci. 22(3): 283-289.
- Newnhan, R. 1990. Mesure du défilement de forme variable. Forests Canada. Institute Forestier National de Petawawa. Rapport information PI-X-83-F. 31 p.
- Ormerod, D. 1973. A simple bole model. For. Chro. 49: 136-138.
- SAS (Statistical Analysis System) Institute Inc. 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC. SAS Institute Inc. pp: 1023-1335.
- Schumacher, E. X., and F. D. S. Hall. 1933. Logarithmic expression of timber-tree volume. J. Agr. Res. 4: 719-734.
- Tamarit U., J. C., H. M. De los Santo P., A. Aldrete, J. R. Valdez L., H. Ramírez M. y V. Guerra De la C. 2014. Sistema de cubicación de árboles individuales de *Tectona grandis* L f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. Rev. Mex. Ciencias For. 5(21): 58-74.
- Washington, S. P., M. G. Karlaftis, and F. L. Mannering. 2011. Statistical and Econometric Methods for Transportation Data Analysis. 2nd ed. Chapman & Hall Book/CRC Taylor & Francis Group. New York, NY, USA. pp: 106-109.
- Zakrzewski, W. T., and D. W. MacFarlane. 2006. Regional stem profile model for cross-border comparisons of harvested Red pine (*Pinus resinosa* Ait.) in Ontario and Michigan. For. Sci. 52: 468-475.
- Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). Test 10: 1-73.