

# AUTO-ACLAREO Y GUÍAS DE DENSIDAD PARA *Pinus patula* MEDIANTE EL ENFOQUE DE REGRESIÓN DE FRONTERA ESTOCÁSTICA

## SELF-THINNING AND DENSITY MANAGEMENT DIAGRAMS FOR *Pinus patula* FITTED UNDER THE STOCHASTIC FRONTIER REGRESSION APPROACH

Wenceslao Santiago-García<sup>1</sup>, Héctor M. De los Santos-Posadas<sup>1\*</sup>, Gregorio Ángeles-Pérez<sup>1</sup>,  
José R. Valdez-Lazalde<sup>1</sup>, David H. Del Valle-Paniagua<sup>2</sup>, J. Javier Corral-Rivas<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Postgrado Forestal, <sup>2</sup>Postgrado en Cómputo Aplicado, Campus Montecillo, Colegio de Postgraduados. Carretera México-Texcoco km 36.5. 56230, Montecillo, Texcoco, Estado de México. (hmsantos@colpos.mx). <sup>3</sup>Facultad de Ciencias Forestales, Universidad Juárez del Estado de Durango. Río Papaloapan y Boulevard Durango s/n, Colonia Valle del Sur, 34120, Durango, México.

### RESUMEN

El manejo forestal en la región de Zacualtipán, estado de Hidalgo, México, se ha enfocado en las últimas tres décadas a cultivar rodales coetáneos puros de *Pinus patula*, la especie maderable nativa con crecimiento más rápido y valor comercial alto. El crecimiento rápido de *P. patula* requiere un manejo adecuado de la densidad del rodal para programar los aclareos y optimizar el turno de los rodales. En este estudio se determinó la línea máxima de la relación densidad-tamaño o auto-aclareo considerando el enfoque de regresión de frontera estocástica y mínimos cuadrados ordinarios para el modelo de Reineke y Yoda. En la estimación se utilizó información dasométrica derivada de 42 parcelas permanentes de muestreo de 400 m<sup>2</sup>. Las mejores estimaciones de la línea de auto-aclareo corresponden a los modelos de frontera estocástica Truncated-normal y Half-normal para los modelos de Reineke y Yoda. Con base en ello se construyeron guías para el control de la densidad, considerando el índice de densidad relativa de Reineke (*IDR*) y el índice de Yoda (*IDY*). El método de regresión de frontera estocástica permite estimar de forma directa el límite superior del auto-aclareo sin recurrir al uso selectivo de datos y se excluye del análisis los puntos donde la mortalidad por auto-aclareo aún no se manifiesta. Para el *IDR* e *IDY* el ajuste estocástico sugiere una tasa de mortalidad más conservadora con respecto al ajuste por mínimos

### ABSTRACT

Forest management in the region of Zacualtipán, Hidalgo, Mexico, has focused in the last three decades on the cultivation of pure even-aged stands of *Pinus patula*, the native timber species of fastest growth and high commercial value. The rapid growth of *P. patula* requires appropriate management of stand density to properly schedule thinnings and optimize stands' rotation. In this study, we determined the maximum line size-density relationship or self-thinning considering the stochastic frontier regression and ordinary least squares approaches for Reineke and Yoda models. In the estimation, we used data derived from 42 permanent sampling plots of 400 m<sup>2</sup>. The best estimates of the self-thinning line were obtained using the stochastic frontier models Truncated-normal and Half-normal of Reineke and Yoda. On this basis, we set diagrams for tree density management, considering the relative stand density index of Reineke (*SDI*) and that of Yoda (*YDI*). The method of stochastic frontier regression enables to directly estimate the upper limit of self-thinning without resorting to the selective use of data, where the points in which mortality from self-thinning has not yet exhibited are excluded from the analysis. For *SDI* and *YDI*, stochastic setting suggests a more conservative mortality rate compared to least squares fit. The method also allows a more efficient use of data, and incorporates information from inventory plots without remeasurements.

\*Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: junio, 2012. Aprobado: octubre, 2012.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 47: 75-89. 2013.

**Key words:** *Pinus patula*, size-density, density diagram, density index.

cuadrados. El método permite además el uso más eficiente de los datos e incorporar información de parcelas de inventario sin remediciones.

**Palabras clave:** *Pinus patula*, densidad-tamaño, diagrama de densidad, índice de densidad.

## INTRODUCCIÓN

El control de la densidad del rodal es clave en el manejo forestal. Después de la calidad del sitio, se considera el segundo factor en importancia para determinar la productividad de un sitio forestal y puede ser manipulada con relativa facilidad por el administrador forestal mediante aclareos (Daniel *et al.*, 1979). El aclareo es una intervención directa al rodal que libera espacio de crecimiento al eliminar ciertos árboles y colocar a los individuos remanentes en una posición competitiva ventajosa, redistribuyendo el potencial de crecimiento del rodal (Smith *et al.*, 1997). Como práctica silvicultural, el aclareo requiere una evaluación cuantitativa de la densidad para conocer el nivel de competencia intraespecífica y con ello tomar decisiones sobre la necesidad e intensidad del aclareo (Husch *et al.*, 1982; Torres y Magaña, 2001).

En silvicultura las medidas de densidad relativa son de gran interés para evaluar el grado de densidad de un rodal. La medida de densidad relativa tradicional para la construcción de diagramas o guías de densidad es el índice de densidad de Reineke (*IDR*). El *IDR* está basado en la relación densidad-tamaño que existe entre el número de árboles por hectárea (*NA*) de un rodal y su diámetro medio cuadrático (*Dq*). Expresada en escala logarítmica base 10, esta relación tendría una pendiente universal de  $-1.605$  (Reineke, 1933; Pretzsch, 2009). Otra medida usada para evaluar densidad es el índice de Yoda (*IDY*) basado en la ley del auto-aclareo (relación máxima densidad-tamaño) o ley de los  $-3/2$ . En escala logarítmica natural, la relación entre el número de plantas por unidad de área y su biomasa promedio debería mantener una relación lineal con una pendiente universal de  $-1.5$  (Yoda *et al.*, 1963; Pretzsch, 2009). En dasonomía se utiliza el volumen promedio de los árboles y el número de árboles por unidad de superficie para evaluar la densidad de un rodal (Drew and Flewelling, 1979).

## INTRODUCTION

Controlling stand density is fundamental in forest management. After site quality, stand density is considered the second most important factor in determining forest site productivity. It may be modified by foresters through thinning to achieve a desired future stand condition (Daniel *et al.*, 1979). Thinning is a direct intervention in the stand that releases space for growth by removing some trees and placing the remaining individuals in a competitive favorable position, redistributing stand growth potential (Smith *et al.*, 1997). As silvicultural practice, thinning requires a quantitative assessment of tree density to determine the level of intraspecific competition and thus make decisions about the need and intensity of thinning (Husch *et al.*, 1982, Torres and Magaña, 2001).

In forestry, relative density measurements are of great interest to assess the degree of stand density. The traditional measure of relative density for developing density diagrams or guides is the Reineke's stand density index (*SDI*). The *SDI* is based on the size-density relationship between the number of trees per hectare (*NA*) of a stand and its quadratic mean diameter (*Dq*). Expressed in base 10 logarithmic scale, this relationship should have a universal slope of  $-1.605$  (Reineke, 1933; Pretzsch, 2009). Another measure used to evaluate the density is Yoda index (*YDI*), based on the self-thinning law (maximum size-density relationship) or law of  $-3/2$ . In natural logarithmic scale, the relationship between the number of plants per unit area and average biomass should maintain a linear relationship with a universal slope of  $-1.5$  (Yoda *et al.*, 1963; Pretzsch, 2009). In forestry, the average volume of trees and the number of trees per unit area are used to assess the density of a stand (Drew and Flewelling, 1979).

A guide or density management diagram is a graphical model that allows us to track changes in the density of even-aged stands considering size-density relationships (Torres and Magaña, 2001). These forestry tools reflect fundamental relationships including the size of the trees, the total number of living individuals, occupation and self-thinning (Vacchiano *et al.*, 2008). Their application allows us to properly program the thinning of a stand when considering the fact that trees die from self-thinning

Una guía o diagrama de densidad es un modelo gráfico que permite dar seguimiento a los cambios en la densidad de los rodales coetáneos considerando relaciones de densidad-tamaño (Torres y Magaña, 2001). Estas herramientas silvícolas reflejan relaciones fundamentales que incluyen el tamaño de los árboles, el número total de individuos vivos, la ocupación y el auto-aclareo (Vacchiano *et al.*, 2008). Su aplicación permite programar adecuadamente los aclareos de un rodal al considerar que los árboles mueren por auto-aclareo cuando están cerca de la densidad máxima para un tamaño de árbol determinado (Smith *et al.*, 1997).

Los métodos usados para ajustar la línea de auto-aclareo así como los datos usados en el ajuste son controversiales (Bi *et al.*, 2000; Zhang *et al.*, 2005). El método más común para estimar la línea máxima de la relación densidad-tamaño consiste en relacionar linealmente la densidad del rodal y el tamaño del arbolado mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y los datos seleccionados de rodales coetáneos de máxima densidad (en máxima competencia). Este enfoque es subjetivo y resulta en una estimación de un máximo medio en contraposición a un máximo absoluto de la relación densidad-tamaño.

La técnica econométrica modelo de regresión de frontera estocástica (RFE; Aigner *et al.*, 1977) fue usada por Bi *et al.* (2000), Bi (2001, 2004) y Zhang *et al.* (2005) para estimar la línea del auto-aclareo en rodales coetáneos y puros de pino. Este método usa todos los datos disponibles en la estimación funcional de los coeficientes, excluyendo la necesidad de marcar arbitrariamente particiones en los datos, lo cual elimina la subjetividad y provee una estimación eficiente del límite superior del auto-aclareo.

Los objetivos de este estudio fueron: 1) estimar la línea del auto-aclareo en rodales coetáneos de *Pinus patula* Schiede ex Schlechtendal & Chamisso mediante la función de frontera estocástica y el enfoque de mínimos cuadrados ordinarios para los modelos de Reineke y de Yoda, 2) comparar las estimaciones de las líneas del auto-aclareo obtenidas, y 3) generar diagramas para el manejo de la densidad de los rodales considerados a partir de la mejor estimación de la línea del auto-aclareo.

when they are near the maximum density for a given tree size (Smith *et al.*, 1997).

The methods used to fit the self-thinning line and data used in the fitting are controversial (Bi *et al.*, 2000, Zhang *et al.*, 2005). The most common method for estimating the maximum line of the size-density relationship is to relate linearly stand density and the size of trees through ordinary least squares methods (OLS) and the data from even-aged stands of maximum density (maximum competition). This approach is subjective and results in an estimate of a half maximum, as opposed to an absolute maximum of the size-density relationship.

The econometric technique stochastic frontier regression (SFR; Aigner *et al.*, 1977) was employed by Bi *et al.* (2000), Bi (2001, 2004) and Zhang *et al.* (2005) to estimate the line of self-thinning in even-aged and pure pine stands. This method uses all available data for the functional estimation of coefficients, excluding the need to mark arbitrarily partitioned data, which eliminates subjectivity and provides an efficient estimate of the upper limit of self-thinning.

The objectives of this study were 1) to estimate the line of self-thinning in even-aged stands of *Pinus patula* Schiede ex Schlechtendal & Chamisso by using the stochastic frontier function and ordinary least squares approach for models of Reineke and Yoda; 2) to compare estimates of the self-thinning lines obtained; and 3) develop diagrams for density management of the stands based on the best estimates of the self-thinning line.

## MATERIALS AND METHODS

### Study area and dasometric data

The data used in this study come from three measurements made periodically in 42 permanent sampling square-shaped plots, of 400 m<sup>2</sup>, located in pure and even-aged stands of *P. patula* in Ejido La Mojonera, southeast of the municipality of Zacualtipán de Ángeles, in the state of Hidalgo, Mexico. We used the number of trees (*NA*), total height (*A*) and diameter at breast height (*D*) of all living trees within each plot to estimate the following stand state variables: basal area (*AB*, m<sup>2</sup> ha<sup>-1</sup>), number of trees (*NA* ha<sup>-1</sup>), quadratic mean diameter (*Dq*, cm):

$Dq = \sqrt{\frac{40000}{\pi} \times \frac{AB}{NA}}$  and volume (*V*, m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup>). Considering

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Área de estudio y datos dasométricos

Los datos usados en este estudio provienen de tres mediciones realizadas periódicamente en 42 parcelas permanentes de muestreo de forma cuadrada de 400 m<sup>2</sup>, localizadas en rodales puros y coetáneos de *P. patula* en el ejido La Mojonera, al sureste del municipio de Zacualtipán de Ángeles, en el estado de Hidalgo, México. Se usó el número de árboles (*NA*), la altura total (*A*) y el diámetro normal (*D*) de todos los árboles vivos dentro de cada parcela para estimar las siguientes variables de estado del rodal: área basal (*AB*, m<sup>2</sup> ha<sup>-1</sup>), número de árboles (*NA* ha<sup>-1</sup>), diámetro cuadrático (*Dq*, cm):  $Dq = \sqrt{\frac{40000}{\pi} \times \frac{AB}{NA}}$  y volumen (*V*, m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup>). Considerando el volumen y el número de árboles por hectárea, se obtuvo el volumen promedio por árbol (*Vp*, m<sup>3</sup>):  $Vp = V/NA$ . En la relación limitante densidad-tamaño o auto-aclareo se emplearon el *NA vs. Dq* y el *Vp vs. NA* para el modelo de Reineke y el de Yoda.

### Modelos de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

El número de árboles por hectárea para una densidad completa varía dependiendo del diámetro promedio del rodal. Para determinar la densidad del rodal, es necesario tener una curva que muestre el número de árboles por hectárea para todos los diámetros promedio. Esta curva puede ser representada por la Ecuación 1 (Reineke, 1933; Pretzsch, 2009):

$$NA = \alpha \times Dq^{-\beta} \quad (1)$$

Al linealizar (1) se obtiene el modelo de Reineke para estimar la línea del auto-aclareo:

$$\ln(NA) = \alpha - \beta \times \ln(Dq) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\varepsilon \sim iid N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

El modelo de auto-aclareo de Yoda corresponde al modelo lineal de la forma (Yoda *et al.*, 1963; Bi *et al.*, 2000; Montero *et al.*, 2007):

$$\ln(Vp) = \alpha - \beta \times \ln(NA) + \varepsilon \quad (3)$$

$$\varepsilon \sim iid N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde *NA* es el número de árboles por hectárea, *Dq* es el diámetro cuadrático por hectárea, *Vp* es el volumen promedio por

the volume and number of trees per hectare, we obtained the average volume per tree (*Vp*, m<sup>3</sup>):  $Vp = V/NA$ . In the limiting size-density relationship or self-thinning we used *NA vs. Dq* and *Vp vs. NA* for both the Reineke and Yoda models.

### Ordinary least square models (OLS)

The number of trees per hectare for full density varies with the mean stand diameter. To determine the stand density, it is necessary to develop a curve showing the number of trees per hectare for all mean diameters. This curve can be represented by Equation 1 (Reineke, 1933; Pretzsch, 2009):

$$NA = \alpha \times Dq^{-\beta} \quad (1)$$

By linearizing (1) we obtained the Reineke's model to estimate the self-thinning line:

$$\ln(NA) = \alpha - \beta \times \ln(Dq) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\varepsilon \sim iid N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

The self-thinning Yoda model corresponds to the linear model of the form (Yoda *et al.*, 1963, Bi *et al.*, 2000; Montero *et al.*, 2007):

$$\ln(Vp) = \alpha - \beta \times \ln(NA) + \varepsilon \quad (3)$$

$$\varepsilon \sim iid N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

where *NA* is the number of trees per hectare, *Dq* is the quadratic mean diameter per hectare, *Vp* is the mean volume per tree, *ln* indicates the natural logarithm,  $\alpha$  and  $\beta$  are parameters to be estimated, and  $\varepsilon$  is the error term in the model.

### Stochastic frontier regression models (SFR)

The frontier regression models estimate the extreme values of a data set, rather than the mean or a function's quantiles. In the stochastic approach, the frontier itself is a random variable, so that each observation has its own frontier function that deviates from the general function. The advantage of this approach is that it considers that the frontier can be the result of external factors that are not measured. The stochastic boundary model divides the error component in: 1) an error component associated with the measurement of individual observations ( $v_i$ ) and 2) an error component which is assumed to account for data technical inefficiency ( $u_i$ ) (Kumbhakar and Lovell, 2000; Cummings *et al.*, 2001).

árbol,  $\ln$  indica el logaritmo natural,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros a estimar y  $\varepsilon$  es el término de error en el modelo.

**Modelos de regresión de frontera estocástica (RFE)**

Los modelos de regresión de frontera estiman los valores extremos de un conjunto de datos, en lugar de la media o los cuantiles de una función. En el método estocástico, la propia frontera es una variable aleatoria de manera que cada observación tiene su propia función frontera que se desvía de la función general. La ventaja de este enfoque es considerar que la frontera puede ser consecuencia de factores externos no medidos. El modelo de frontera estocástica divide el componente de error en: 1) un componente de error asociado con la medición de las observaciones individuales ( $v_i$ ) y 2) un componente de error que se asume para dar cuenta de la ineficiencia técnica en los datos ( $u_i$ ) (Kumbhakar y Lovell, 2000; Cummings *et al.*, 2001).

La forma del modelo de RFE, según Aigner *et al.* (1977) es:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i \tag{4}$$

La estructura del error es:

$$\varepsilon_i = v_i + u_i, \quad i=1, \dots, N.$$

donde  $y_i$  es la producción (*output*),  $x_i$  es un vector ( $k \times 1$ ) de cantidades de entrada (*input*),  $\beta$  es el vector de parámetros desconocidos,  $v_i$  es una perturbación simétrica distribuida independientemente de  $u_i$ . Ésta recoge las variaciones aleatorias en la producción debido a factores como errores aleatorios, errores en la observación y medida de los datos, y se supone que se distribuye  $iid N(0, \sigma_v^2)$ ; el componente  $u_i$  es un término asimétrico que recoge la ineficiencia técnica de las observaciones y se supone que se distribuye independientemente de  $v_i$  y de los regresores. Por tanto, hay que seleccionar distribuciones estadísticas para  $u_i$ , que se distribuyan para un solo lado, como en el caso de la semi-normal y la exponencial (Brescia *et al.*, 2003; Zhang *et al.*, 2005).

Si el valor de la ineficiencia técnica  $u_i$  se asume como cero, lo cual es menos probable con valores crecientes de  $u_i$ , entonces el modelo  $iid N^+(0, \sigma_u^2)$  se refiere al modelo Half-normal. Si los  $u_i$  ( $i=1 \dots N$ ) son variables aleatorias no negativas  $iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$ , entonces el modelo se conoce como el modelo Truncated-normal (en cero) (Kumbhakar y Lovell, 2000). Las técnicas de máxima verosimilitud se usan para estimar la frontera y el parámetro de la ineficiencia. El término de ineficiencia,  $u_i$ , es de interés en econometría. Si los datos están en el espacio logarítmico,  $u_i$  es una medida del porcentaje en

The SFR model form according to Aigner *et al.* (1977) is:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i \tag{4}$$

The structure of the error is:

$$\varepsilon_i = v_i + u_i, \quad i=1, \dots, N.$$

where  $y_i$  is the output,  $x_i$  is a vector ( $k \times 1$ ) of input quantities,  $\beta$  is the vector of unknown parameters,  $v_i$  is a symmetric perturbation distributed independently of  $u_i$ . This includes random variations in output due to factors such as random errors, errors in the observation and measurement of data, and is supposed to be distributed  $iid N(0, \sigma_v^2)$ ; the component  $u_i$  is an asymmetric term that incorporates technical inefficiency of the observations and is assumed to be distributed independently of  $v_i$  and the regressors. Therefore, it is necessary to select statistical distributions for  $u_i$ , to be distributed on one side only, as in the case of the semi-normal and the exponential (Brescia *et al.*, 2003, Zhang *et al.*, 2005).

If the value of technical inefficiency  $u_i$  is assumed to be zero, which is less likely with increasing values of  $u_i$ , then the model  $iid N^+(0, \sigma_u^2)$  refers to the model Half-normal. If  $u_i$  ( $i=1 \dots N$ ) are nonnegative random variables  $iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$ , then the model is known as the Truncated-normal model (zero) (Kumbhakar and Lovell, 2000). Maximum likelihood techniques are used to estimate the frontier and the inefficiency parameter. The inefficiency term  $u_i$  is of interest in econometrics. If the data are in logarithmic space,  $u_i$  is a measure of the percentage by which a particular observation can not reach the estimated frontier. To model the self-thinning ratio,  $u_i$  is of no interest per se but simply the adjusted frontier, but may be useful to identify the stage in which stands begin to experience density-dependent mortality. In this application,  $u_i$  represents the difference in stand density at a given time and the estimated maximum density. This eliminates the need to subjectively build databases that are near the frontier.

The Reineke model to estimate the self-thinning line through SFR has the following structure:

$$\ln(NA) = \alpha + \beta \times \ln(Dq) - u + v \tag{5}$$

$$v \sim iid N(0, \sigma_v^2)$$

$$u \sim iid N^+(0, \sigma_u^2) \text{ o } iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$$

The SFR self-thinning model for Yoda is:



que una observación determinada no puede alcanzar la frontera estimada. Para modelar la relación de auto-aclareo,  $u_i$  no es de interés *per se* sino simplemente la frontera ajustada, pero puede ser útil para identificar la etapa en que los rodales comienzan a experimentar mortalidad relacionada con la densidad. En esta aplicación,  $u_i$  representa la diferencia en la densidad del rodal en un momento dado y la densidad máxima estimada. Este hecho elimina la necesidad de construir subjetivamente las bases de datos que están cerca de la frontera.

El modelo de Reineke para estimar la línea del auto-aclareo mediante *RFE* tiene la siguiente estructura:

$$\ln(NA) = \alpha + \beta \times \ln(Dq) - u + v \quad (5)$$

$$v \sim iid N(0, \sigma_v^2)$$

$$u \sim iid N^+(0, \sigma_u^2) \text{ o } iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$$

El modelo de *RFE* de auto-aclareo para Yoda es:

$$\ln(Vp) = \alpha + \beta \times \ln(NA) - u + v \quad (6)$$

$$v \sim iid N(0, \sigma_v^2)$$

$$u \sim iid N^+(0, \sigma_u^2) \text{ o } iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$$

donde  $NA$ ,  $Dq$ ,  $Vp$ ,  $\ln$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  fueron definidos previamente, y  $u$  y  $v$  son los términos de error en el modelo de *RFE*.

### Construcción de diagramas de densidad

Se construyeron guías de densidad tradicionales del tipo Reineke y Yoda con las mejores estimaciones de la línea del auto-aclareo. Para calcular el índice de densidad relativa de Reineke (*IDR*) se fijó un diámetro cuadrático de referencia de 20 cm, valor promedio observado en las parcelas de muestreo, usando la siguiente expresión (Montero *et al.*, 2007; Pretzsch, 2009):

$$IDR = NA \times \left(\frac{20}{Dq}\right)^{-\beta} \quad (7)$$

Para estimar el número de árboles de un *IDR* dado, entonces:

$$NA = IDR \times \left(\frac{Dq}{20}\right)^{-\beta} \quad (8)$$

donde  $NA$  corresponde al número de árboles por hectárea,  $Dq$  es el diámetro cuadrático por hectárea, *IDR* índice de densidad relativa de Reineke, y  $\beta$  es la pendiente del modelo.

$$\ln(Vp) = \alpha + \beta \times \ln(NA) - u + v \quad (6)$$

$$v \sim iid N(0, \sigma_v^2)$$

$$u \sim iid N^+(0, \sigma_u^2) \text{ o } iid N^+(\mu, \sigma_u^2)$$

where  $NA$ ,  $Dq$ ,  $Vp$ ,  $\ln$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  were previously defined, and  $u$  and  $v$  are the terms of error in the SFR model.

### Construction of density diagrams

We built traditional density guides of the Reineke and Yoda type, based on the best estimates of the self-thinning line. To calculate the relative density of Reineke (*SDI*), we fixed a quadratic reference mean diameter of 20 cm, the average value observed in the sample plots, using the following expression (Montero *et al.*, 2007; Pretzsch, 2009):

$$SDI = NA \times \left(\frac{20}{Dq}\right)^{-\beta} \quad (7)$$

To estimate the number of trees of a given *SDI*, we used:

$$NA = SDI \times \left(\frac{Dq}{20}\right)^{-\beta} \quad (8)$$

where  $NA$  is the number of trees per hectare,  $Dq$  is the quadratic mean diameter per hectare, *SDI* the Reineke relative density index, and  $\beta$  is the model slope.

For the Yoda index (*YDI*), we took as reference 100 trees per hectare for the calculation based on the average volume (*Vp*):

$$YDI = Vp \times \left(\frac{100}{NA}\right)^{-\beta} \quad (9)$$

To calculate the average volume of residual trees according to *YDI* the following expression is used:

$$Vp = YDI \times \left(\frac{NA}{100}\right)^{-\beta} \quad (10)$$

With these formulas, we could build nomograms known as density guides. To identify areas of growth in density diagrams, we estimated the maximum values of *SDI* and *YDI* according to the self-thinning line set.

Para el índice de Yoda (*IDY*), se tomaron como referencia 100 árboles por hectárea para el cálculo en función del volumen promedio (*Vp*):

$$IDY = Vp \times \left(\frac{100}{NA}\right)^{-\beta} \quad (9)$$

Para calcular el volumen promedio del árbol residual en función del *IDY*:

$$Vp = IDY \times \left(\frac{NA}{100}\right)^{-\beta} \quad (10)$$

Con estas fórmulas fue posible construir los nomogramas conocidos como guías de densidad. Para delimitar las zonas de crecimiento en las guías de densidad se estimó el valor máximo del *IDR* e *IDY* de acuerdo con la línea del auto-aclareo ajustada.

#### Ajuste de los modelos

El ajuste de los modelos de *RFE* se realizó con el procedimiento QLIM de SAS/ETS® 9.3 (SAS Institute Inc., 2011) el cual usa métodos basados en máxima verosimilitud (ML) para la estimación de parámetros. En este caso se usó la técnica de optimización Quasi-Newton, la cual consiste de algoritmos para encontrar máximos y mínimos locales de funciones. Los modelos basados en *MCO* fueron estimados con el procedimiento REG. Para la selección de los mejores modelos de *RFE* se consideraron los indicadores estadísticos: logaritmo de verosimilitud (*Log L*), criterio de información de Akaike (*AIC*) y criterio de Schwarz (*SchC*). Además, el comportamiento de la trayectoria de las líneas de auto-aclareo, al sobreponerlas a los datos observados, fue crucial en la selección de los modelos.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Estimación de la línea de auto-aclareo

En la elaboración de las guías de densidad se estimaron las relaciones funcionales  $NA=f(Dq)$  y  $Vp=f(NA)$  para el modelo de Reineke y Yoda (Reineke, 1933; Yoda *et al.*, 1963). Los Cuadros 1 y 2 muestran los resultados de los ajustes obtenidos para los modelos 5 y 6, a través de *MCO* y *RFE*.

En los análisis de regresión se ajustó la forma lineal de los modelos porque la transformación logarítmica de las variables dependiente e independiente permite controlar la heterogeneidad de varianzas

### Models fitting

We performed the fitting of the *SFR* models by using the QLIM procedure of SAS/ETS® 9.3 (SAS Institute Inc., 2011). The procedure uses methods based on maximum likelihood (ML) for parameter estimation. In this case, we used the Quasi-Newton optimization technique, which consists of algorithms to find local maxima and minima of functions. On the other hand, we estimated the OLS-based models with the REG procedure. For the selection of the best *SFR* models, we considered statistical indicators, namely: log likelihood (*Log L*), Akaike information criterion (*AIC*), and Schwarz criterion (*SchC*). Moreover, the behavior of the self-thinning lines, when overlaying them on the data observed, was crucial in the selection of models.

## RESULTS AND DISCUSSION

### Self-thinning line estimation

In developing density management diagrams, we estimated the functional relationships  $NA=f(Dq)$  and  $Vp=f(NA)$  for the Reineke and Yoda models (Reineke, 1933; Yoda *et al.*, 1963). Tables 1 and 2 show the results of the fit obtained for models 5 and 6 through *OLS* and *SFR*.

In the regression analyses, we fitted the linear shape of models because the logarithmic transformation of the dependent and independent variables enabled to control the heterogeneity of variances (Gezan *et al.*, 2007; Comeau *et al.*, 2010). The density data of the permanent plots clearly reflect the self-thinning line (Figures 1 and 2).

When fitting the regression models, we used the dasometric information of all the plots available, because one of the benefits of the *SFR* approach is to avoid subjectivity in the selection of data to estimate the extreme values of the self-thinning functions. Bi *et al.* (2000) and Zhang *et al.* (2005) report that *SFR* models have potential for efficiently producing the upper limit of self-thinning, without subjective selection of a data set under a predefined criterion (*e.g.*, excessive density stands). They also indicate that the *OLS* method is sensitive to data selection and can produce a self-thinning line with an inappropriate slope. In contrast, Comeau *et al.* (2010), on estimating the self-thinning line for *Picea sitchensis* (Bong.) Carr and *Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco with *SFR* and *OLS*, focused on the results of *OLS* arguing that this method provides an efficient estimate because

**Cuadro 1. Valores estimados de los parámetros y estadísticos de ajuste para el modelo de auto-aclareo de Reineke basado en MCO y RFE.**  
**Table 1. Parameter estimates and goodness of fit statistics for the Reineke self-thinning model based on OLS and SFR approaches.**

Modelo	Parámetros	Estimación	Error estándar	Valor de t	Pr >  t	
Reineke MCO	$\alpha$	12.00268	0.14882	80.65	<.0001	
	$\beta$	-1.74676	0.05164	-33.82	<.0001	
	$\sigma^2$	0.04611				
Reineke RFE	$\alpha$	12.430472	0.187711	66.22	<.0001	
	$\beta$	-1.817830	0.057573	-31.57	<.0001	
	$\sigma_v^2$	0.127801	0.028029	4.56	<.0001	
	$\sigma_u^2$	0.283305	0.047429	5.97	<.0001	
	Half-normal					
	$Log L$	17.66012				
	$AIC$	-27.32025				
	$SchC$	-16.20375				
	$\lambda$	2.21676				
Reineke RFE	$\alpha$	12.106094	0.229549	52.74	<.0001	
	$\beta$	-1.565565	0.106275	-14.73	<.0001	
	$\sigma_v^2$	0.234567	0.062223	3.77	0.0002	
	$\sigma_u^2$	0.195134	0.059412	3.28	0.0010	
	Truncated-normal					
		$\mu$	0.472270	0.098912	4.77	<.0001
		$Log L$	-13.49694			
	$AIC$	36.99387				
	$SchC$	50.88949				
	$\lambda$	0.83189				

*Log L*: logaritmo de verosimilitud; *AIC*: Criterio de información de Akaike; *SchC*: criterio de Schwarz y  $\lambda$ : Lambda ❖ *Log L*: log likelihood; *AIC*: Akaike information criterion; *SchC*: Schwarz criterion, and  $\lambda$ : Lambda.

(Gezan *et al.*, 2007; Comeau *et al.*, 2010). Los datos de densidad de las parcelas permanentes usadas reflejan claramente la línea del auto-aclareo (Figuras 1 y 2).

En el ajuste de los modelos de regresión se utilizó la información dasométrica de todas las parcelas disponibles porque una de las bondades del enfoque de *RFE* es evitar la subjetividad en la selección de los datos al estimar los valores extremos de las funciones de auto-aclareo. Bi *et al.* (2000) y Zhang *et al.* (2005) mencionan que los modelos de *RFE* tienen potencial para producir de manera eficiente el límite superior del auto-aclareo, sin selección subjetiva de un conjunto de datos bajo un criterio predefinido (por ejemplo, rodales de densidad excesiva). También indican que el método de *MCO* es sensible a la selección de los datos y puede producir la línea de auto-aclareo con una pendiente inapropiada. En contraste, Comeau *et al.* (2010) al estimar la línea de auto-aclareo para

both regression methods have similar ranges in terms of intercept and slope.

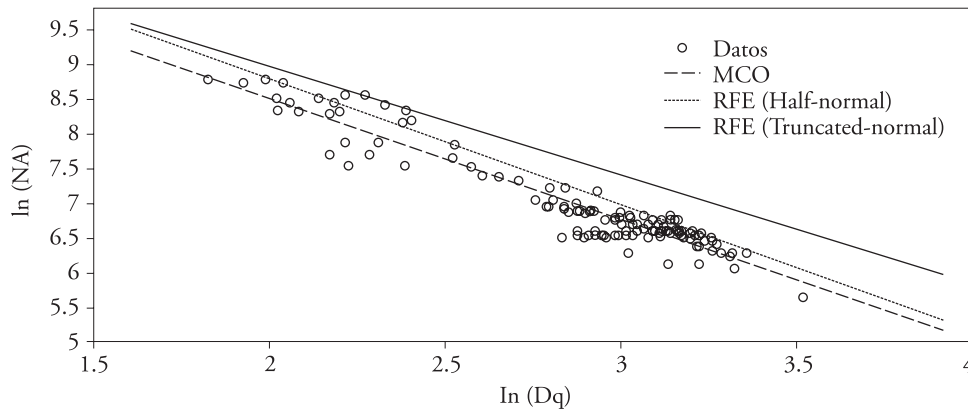
### Comparison of self-thinning lines

The *OLS*-based models represent a line of central tendency, while *SFR* models estimate the extreme values of the data set instead of the mean value (Figures 1 and 2). However, from the mean value of Reineke model ( $\alpha=12.002$  and  $\beta=-1.746$ ) and Yoda ( $\alpha=7.353$  and  $\beta=-1.302$ ), it is possible to obtain the line of maximum stand density (self-thinning line). The slope parameter ( $\beta$ ) remains unchanged but it is necessary to increase the value of the intercept ( $\alpha$ ) to estimate an  $\alpha_{max}$ . To obtain this parameter, several methods are used; Comeau *et al.* (2010) modified the value of the intercept in the Reineke model to match the number of trees suggested by the model with the maximum *SDI* found in stands of *P. sitchensis* and



**Cuadro 2. Valores estimados de los parámetros y estadísticos de ajuste para el modelo de auto-aclareo de Yoda basado en MCO y RFE.**  
**Table 2. Parameter estimates and goodness of fit statistics for the Yoda self-thinning model based on OLS and SFR approaches.**

Modelo	Parámetros	Estimación	Error estándar	Valor de t	Pr >  t
Yoda MCO	$\alpha$	7.35342	0.28257	26.02	<.0001
	$\beta$	-1.30280	0.04009	-32.50	<.0001
	$\sigma^2$	0.09345			
Yoda RFE Half-normal	$\alpha$	7.052610	0.161436	43.69	<.0001
	$\beta$	-1.199907	0.024508	-48.96	<.0001
	$\sigma_v^2$	0.044749	0.033167	1.35	0.1773
	$\sigma_u^2$	0.521660	0.044959	11.60	<.0001
	<i>Log L</i>	-16.69543			
	<i>AIC</i>	41.39086			
	<i>SchC</i>	52.50736			
Yoda RFE Truncated-normal	$\alpha$	7.380608	0.355371	20.77	<.0001
	$\beta$	-1.213066	0.053283	-22.77	<.0001
	$\sigma_v^2$	0.235074	0.070980	3.31	0.0009
	$\sigma_u^2$	0.317657	0.047701	6.66	<.0001
	$\mu$	0.464197	0.021504	21.59	<.0001
	<i>Log L</i>	-41.62129			
	<i>AIC</i>	93.24259			
	<i>SchC</i>	107.1382			
	$\lambda$	1.35131			



**Figura 1. Líneas de auto-aclareo obtenidas mediante MCO y RFE para el modelo de Reineke (sobrepuestas a los datos de densidad observados en parcelas permanentes de muestreo).**  
**Figure 1. Self-thinning lines obtained through OLS and SFR for the Reineke model (overlaid on the density data observed in permanent sampling plots).**

*Picea sitchensis* (Bong.) Carr. y *Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco mediante RFE y MCO, se enfocan en los resultados de MCO argumentando que este método provee una estimación eficiente porque ambos

*P. menziesii*, for a 25 cm reference *Dq*. Gezan *et al.* (2007) increased the intercept value in 1.96 standard deviations of the model error ( $s^2$ ), *i.e.*  $\alpha_{max} = 1.96 \times (\alpha_i)$  for stands in Chile of *Nothofagus alpina* (Poep. *et*

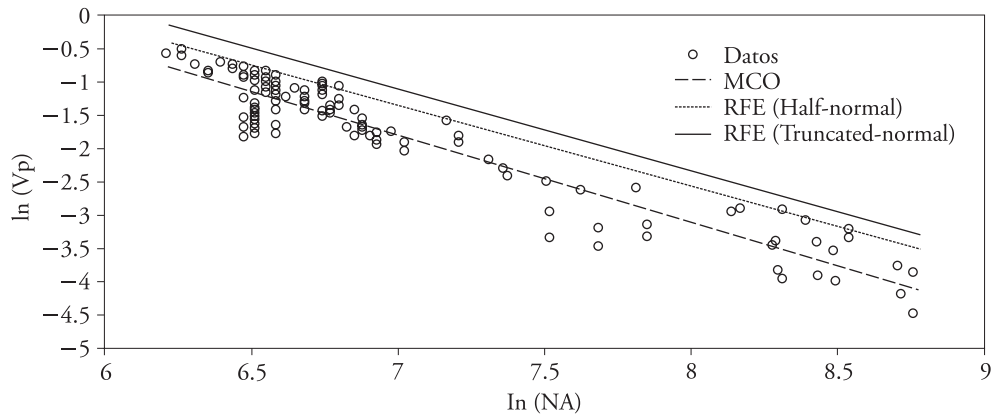


Figura 2. Líneas de auto-aclareo obtenidas mediante MCO y RFE para el modelo de Yoda (sobrepuestas a los datos de densidad observados en parcelas permanentes de muestreo).

Figure 2. Self-thinning lines obtained through OLS and SFR for the Yoda model (overlaid on the density data observed in permanent sampling plots).

métodos de regresión tienen rangos similares en los términos de intercepto y pendiente.

### Comparación de las líneas de auto-aclareo

Los modelos basados en MCO representan una línea de tendencia central, mientras que los modelos de RFE estiman los valores extremos del conjunto de datos en lugar del valor promedio (Figuras 1 y 2). Sin embargo, a partir del valor promedio del modelo de Reineke ( $\alpha=12.002$  y  $\beta=-1.746$ ) y Yoda ( $\alpha=7.353$  y  $\beta=-1.302$ ), es posible obtener la línea de máxima densidad del rodal (línea de auto-aclareo). Para ello, el valor de la pendiente ( $\beta$ ) permanece invariable pero es necesario aumentar el valor del intercepto ( $\alpha$ ) del modelo para estimar un  $\alpha_{max}$ . Para obtener este parámetro se usan varios métodos; así, Comeau *et al.* (2010) modificaron el valor del intercepto en el modelo de Reineke para hacer coincidir el número de árboles sugerido por el modelo con el IDR máximo encontrado en rodales de *P. sitchensis* y *P. menziesii*, para un  $Dq$  de referencia de 25 cm. Gezan *et al.* (2007) aumentaron el valor del intercepto en 1.96 desviaciones estándar del error del modelo ( $s^2$ ), es decir,  $\alpha_{max}=1.96 \times (\alpha_i)$  para rodales en Chile de *Nothofagus alpina* (Poepp. et Endl.) Oerst., *Nothofagus dombeyi* (Mirb.) Oerst. y *Nothofagus obliqua* (Mirb.) Oerst., indicando que asintóticamente sólo existe 2.5 % de probabilidad de encontrar parcelas que sobrepasen la línea de densidad máxima. Asimismo, Montero *et al.* (2007)

Endl.) Oerst., *Nothofagus dombeyi* (Mirb.) Oerst. and *Nothofagus obliqua* (Mirb.) Oerst., indicating that there is only asymptotically 2.5 % probability of finding plots exceeding the maximum density line. Likewise Montero *et al.* (2007) developed density management diagrams for *Hyeronima alchorneoides* Allemão in Costa Rica and changed the value of the intercept in the Reineke and Yoda model to estimate self-thinning. These methodologies are practical, but result in a subjective approach for estimating the self-thinning line.

The SFR models provide a straightforward and efficient estimate of the upper limit of self-thinning. This limit represents the largest number of individuals that the stand can support according to its quadratic mean diameter ( $Dq$ ) or mean volume ( $Vp$ ). In the Reineke model, the Truncated-normal fitting generated a higher intercept ( $\alpha=12.106$ ) compared to OLS ( $\alpha=12.002$ ), but less than the Half-normal model ( $\alpha=12.430$ ). By overlaying the self-thinning lines to the data, we observed a better behavior for the Truncated-normal model because there are no data exceeding the frontier (Figure 1), although the error variance ( $\sigma_v^2=0.234$ ) is relatively larger compared to the Half-normal error variance ( $\sigma_v^2=0.127$ ). Cummings *et al.* (2001) noted that a large number of observations would exceed the true boundary and the results would be difficult to interpret. In the Half-normal model, we obtained values above the frontier, resulting from the measurement error, that is, the first error

elaboraron guías de densidad para *Hyeronima alchorneoides* Allemão en Costa Rica y modificaron el valor del intercepto en el modelo de Reineke y Yoda para estimar el auto-aclareo. Estas metodologías son prácticas, pero resultan en un enfoque subjetivo para la estimación de la línea de auto-aclareo.

Los modelos de *RFE* proveen una estimación directa y eficiente del límite superior del auto-aclareo. Este límite representa la mayor cantidad de individuos que el rodal puede soportar de acuerdo a su diámetro cuadrático ( $Dq$ ) o volumen promedio ( $Vp$ ). En el modelo de Reineke, el ajuste Truncated-normal generó un intercepto mayor ( $\alpha=12.106$ ) respecto a *MCO* ( $\alpha=12.002$ ), pero menor al modelo Half-normal ( $\alpha=12.430$ ). Al sobreponer las líneas de auto-aclareo a los datos se observó un mejor comportamiento para el modelo Truncated-normal porque no existen datos que sobrepasen la frontera (Figura 1), aunque la varianza del error ( $\sigma_v^2=0.234$ ) es relativamente más grande comparada con la varianza del error Half-normal ( $\sigma_v^2=0.127$ ). Cummings *et al.* (2001) mencionan que un gran número de observaciones excederían la verdadera frontera y los resultados serían difíciles de interpretar. En el modelo Half-normal existen observaciones superiores a la frontera como resultado del error de medición, esto es, el primer componente de error ( $v$ ). Aunque el modelo Half-normal presenta valores más bajos para el *AIC* y *SchC* respecto al modelo Truncated-normal, se eligió a este último para construir la guía de densidad dado su mejor comportamiento gráfico. Además, prácticamente coincide el *IDR* máximo (1655) encontrado en los rodales para un diámetro cuadrático de referencia de 20 cm, con el número de árboles estimado por el modelo de auto-aclareo (1662) cuando el  $Dq$  del rodal es de 20 cm.

Para el modelo de Yoda el comportamiento de la trayectoria de las líneas de auto-aclareo sugiere que el modelo Half-normal se ajusta mejor a los datos (Figura 2). Presenta un valor menor para el *AIC* y *SchC*, comparado con el modelo Truncated-normal y la varianza del error Half-normal ( $\sigma_v^2=0.044$ ) es más pequeña que la varianza del error Truncated-normal ( $\sigma_v^2=0.235$ ). Una varianza menor, junto con los errores estándar más reducidos de los parámetros del modelo son indicadores deseables para un mejor ajuste. La Figura 2 muestra observaciones que exceden la

componente ( $v$ ). Although the Half-normal model showed lower values for *AIC* and *SchC* regarding the Truncated-normal model, we selected the latter to build the density guide, given their best graph performance. Furthermore, the maximum *SDI* found in the stands virtually coincides (1655) in relation to a 20 cm quadratic reference diameter with the number of trees estimated by the self-thinning model (1662) when the stand  $Dq$  is 20 cm.

For the Yoda model, the behavior of the self-thinning lines trajectory suggests that the Half-normal model fits the data best (Figure 2). It has a lower value for *AIC* and *SchC* compared to the Truncated-normal model, and the Half-normal variance error ( $\sigma_v^2=0.044$ ) is smaller than the variance of the Truncated-normal error ( $\sigma_v^2=0.235$ ). A lower variance, together with smaller standard errors of the model parameters are desirable indicators for a better fitting. Figure 2 shows values which exceed the boundary marked by Half-normal, as expected in a stochastic frontier, but these are minimal. In contrast, in the Truncated-normal model, there are no data above this frontier, but it goes too far from the limit set by the data, which overestimates the true boundary. Due to this situation, in addition to statistical criteria, we chose the Half-normal model to build the density guide based on *YDI*.

The slope of the self-thinning line of the models chosen was  $-1.565 \pm 0.208$  for Reineke (1933) and  $-1.199 \pm 0.048$  for Yoda *et al.* (1963). In the case of Reineke, the 95 % confidence interval contains the value  $-1.605$  empirically determined, while for Yoda the estimated slope is statistically far from the  $-1.5$  value. In particular, this result supports the conclusion presented by Del Rio *et al.* (2001), Pretzsch and Biber (2005) and Comeau *et al.* (2010) that the slope ( $\beta$ ) is not always close to the theoretical value and may differ significantly between species; therefore, the law of self-thinning cannot be generalized. The self-thinning model slope must be estimated with the data of each species and study region because populations have different mortality rates, depending on their density or growth habits. Even Zeide (1987) and Cao and Dean (2008) mentioned that the self-thinning line does not have a constant slope, but generally that line is curved. Thus, a realistic model of self-thinning should be inclusive rather than a law and reflect the change in canopy closure or gap dynamics.

frontera marcada por Half-normal, como se espera en una frontera estocástica, pero estas son mínimas. En cambio, en el modelo Truncated-normal no se observan datos que excedan esta frontera pero se aleja demasiado del límite marcado por los datos, por lo cual sobrestima la verdadera frontera. Debido a esta situación, además de los criterios estadísticos, se prefirió el modelo Half-normal en la construcción de la guía de densidad basada en el *IDY*.

La pendiente de la línea de auto-aclareo de los modelos elegidos fue  $-1.565 \pm 0.208$  para Reineke (1933) y  $-1.199 \pm 0.048$  para Yoda *et al.* (1963). En el caso de Reineke el intervalo de confianza al 95 % contiene al valor  $-1.605$  empíricamente determinado, mientras que para Yoda la pendiente estimada dista de manera estadística del valor  $-1.5$ . En particular este resultado apoya la conclusión planteada por Del Río *et al.* (2001), Pretzsch y Biber (2005) y Comeau *et al.* (2010) de que la pendiente ( $\beta$ ) no siempre está cerca del valor teórico y que puede diferir significativamente entre especies; por tanto, la ley del auto-aclareo debe ser generalizada. Así, la pendiente del modelo de auto-aclareo se debe estimar con los datos para cada especie y región de estudio porque las poblaciones presentan una tasa de mortalidad distinta dependiendo de su densidad o de sus hábitos de crecimiento. Incluso Zeide (1987) y Cao y Dean (2008) mencionan que la línea de auto-aclareo no tiene una pendiente constante, sino que generalmente esa línea es una curva. Así, un modelo realista de auto-aclareo debe ser inclusivo más que una ley y reflejar el cambio en el cierre de copas o la dinámica de claros. Además, ignorar la alometría específica de la especie puede causar serios errores en la estimación y control de la densidad (Pretzsch y Biber, 2005).

### Diagramas para el manejo de la densidad

La construcción de las guías requiere primero definir la línea del auto-aclareo, la cual se obtuvo mediante los ajustes de *RFE*. Con este valor máximo se generan las bandas de densidad que representan diferentes zonas de crecimiento sobre las que se evalúa el nivel de competencia de un rodal en particular.

A partir de la mortalidad y el *IDR* (Figura 3) se definieron las zonas de crecimiento-densidad de acuerdo con la teoría de Langsaeter (Daniel *et al.*, 1979;

Also ignoring the species specific allometry can cause serious errors in the estimation and density control (Pretzsch and Biber, 2005).

### Diagrams for density management

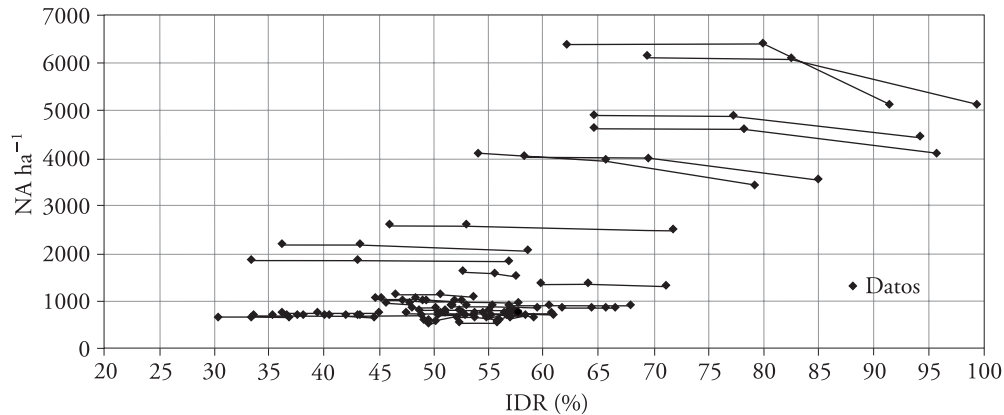
The construction of density diagrams requires first defining the self-thinning line, which we obtained by means of *SFR* fitting. From this maximum, density bands were generated, representing different areas of growth of which we assessed the competition level of a particular stand.

Based on mortality and the *SDI* (Figure 3), we defined the growth-density areas according to the theory by Langsaeter (Daniel *et al.*, 1979, Smith *et al.*, 1997), in which the management of stand density must be planned to maximize individual growth or total biomass production.

Mortality occurs approximately from 55 % of *SDI*, and as stands move closer to the maximum *SDI* (100 %), mortality increases because of competition for site resources. In this study, 55 % of *SDI* can be set as the lower limit of the zone of imminent mortality or self-thinning (55-100 % of *SDI*). In this area, growth per tree and per hectare decreases as competition increases. These results are consistent with other studies that define the lower limit of self-thinning between 55-60 % of maximum density: 55 % of maximum *SDI* for *Pseudotsuga menziesii* (Drew and Flewelling, 1979); 55-60 % of maximum *SDI* for stands of *Pinus ponderosa* Laws. (Long and Shaw, 2005), 60 % for *Pinus sylvestris* L. (Vacchiano *et al.*, 2008) and stands of *N. alpina*, *N. dombeyi* and *N. obliqua* (Gezan *et al.*, 2007).

From 30 to 55 % of *SDI*, the data analysis points to the area of steady growth, thus, this range can be considered the level where there is full occupation of the site; consequently, it is where the stand's gross growth is maximized. According to the records of permanent plots, we recorded these levels as the interval of greatest growth in the density diagram (30-55 % maximum *SDI*). This range is consistent with the 35-55 % of maximum *SDI* in *P. ponderosa* obtained by Long and Shaw (2005), and 35-60 % reported by Vacchiano *et al.* (2008) for *P. Sylvestris*.

Another line implemented in the density management diagrams delimits the area of free growth and corresponds to the level where the stand



**Figura 3.** Líneas de mortalidad de parcelas permanentes de *Pinus patula* usadas para delimitar las zonas de crecimiento en las guías de densidad.  
**Figure 3.** Mortality lines of *Pinus patula* permanent plots used to identify the growth areas in the density management diagrams.

Smith *et al.*, 1997), en las cuales debe planificarse el manejo de la densidad de un rodal para maximizar el crecimiento individual o para maximizar la producción de biomasa total.

La mortalidad se presenta aproximadamente desde 55 % del *IDR* y al acercarse los rodales hacia el *IDR* máximo (100 %), la mortandad es más pronunciada por efecto de la competencia por los recursos del sitio. En este estudio, 55 % del *IDR* puede establecerse como el límite inferior de la zona de mortalidad inminente o auto-aclareo (55-100 % del *IDR*). En esta zona se considera que el crecimiento por árbol y por hectárea disminuye a medida que aumenta la competencia. Estos resultados concuerdan con otros estudios que definen el límite inferior del auto-aclareo entre 55 a 60 % de la densidad máxima: 55 % del *IDR* máximo para *P. menziesii* (Drew y Flewelling, 1979), 55 a 60 % del *IDR* máximo para rodales de *Pinus ponderosa* Laws. (Long y Shaw, 2005), 60 % para *Pinus sylvestris* L. (Vacchiano *et al.*, 2008) y para rodales de *N. alpina*, *N. dombeyi* y *N. obliqua* (Gezan *et al.*, 2007).

De 30 a 55 % de *IDR* el análisis de los datos sugiere la zona de crecimiento constante y este intervalo se puede considerar como el nivel donde existe ocupación plena del sitio, consecuentemente es donde se maximiza el crecimiento bruto del rodal. De acuerdo con los registros de las parcelas permanentes, se establecieron estos niveles como la zona de máximo crecimiento en la guía de densidad (30-55 % del *IDR* máximo). Este intervalo es consistente con el 35-55 % del *IDR* máximo en

canopy closure occurs. According to Gezan *et al.* (2007), to define this line, a maximum canopy area ratio is used, which is used afterwards to determine the maximum number of free growing trees that a stand could tolerate. Unfortunately there are no data of trees growing free of competition and therefore in this case, it is not possible to generate the line in which *Pinus patula* canopy closing occurs. However, setting it at 20 % of *SDI* as an approximation is reasonable, according to other studies in conifers. Drew and Flewelling (1979) set this line at 15 % for *P. menziesii*, and according to Long and Shaw (2005) and Vacchiano *et al.* (2008), this line is 25 % of *SDI* for *P. ponderosa* and *P. sylvestris*.

The density diagram based on *YDI* shows the Langsaeter ratios. The 100 % line indicates the maximum possible density or upper limit of self-thinning; the 55 % line defines the lower limit of the self-thinning area; the 30 % line corresponds to the lower limit of the zone of constant growth and the 20 % line represents the upper limit of free growth without mortality. Figure 4 shows the density diagrams obtained from the best fittings of *SFR*.

## CONCLUSIONS

The method of stochastic frontier regression provides an alternative for efficiently estimating the upper limit of self-thinning, being consistent with the theory on maximum density populations. One advantage is to be able to greatly expand the amount of useful data for the construction of density



*P. ponderosa* obtenido por Long y Shaw (2005) y el 35-60 % reportado por Vacchiano *et al.* (2008) para *P. sylvestris*.

Otra línea implementada en las guías de densidad delimita la zona de crecimiento libre y corresponde al nivel donde ocurre el cierre de copas del rodal. De acuerdo con Gezan *et al.* (2007), para delimitar esta línea se usa una relación del área máxima de copa, la cual luego es usada para determinar el número máximo de árboles de crecimiento libre que un rodal podría tolerar. Desafortunadamente no se cuenta con datos de árboles creciendo libres de competencia y, por tanto, en este caso no es posible generar la línea en la cual se produce el cierre de copas para *Pinus patula*. Sin embargo, establecerla al 20 % del IDR como una aproximación es razonable de acuerdo con otros estudios realizados en coníferas. Así, Drew y Flewelling (1979) establecen esta línea al 15 % para *P. menziesii* y según Long y Shaw (2005) y Vacchiano *et al.* (2008) esta línea es 25 % del IDR para *P. ponderosa* y *P. sylvestris*.

En el diagrama de densidad basado en el IDY se muestran las relaciones de Langsaeter. La línea de 100 % indica la densidad máxima posible o límite superior del auto-aclareo, la línea de 55 % define el límite inferior de la zona de auto-aclareo, la línea de 30 % corresponde al límite inferior de la zona de crecimiento constante y la línea de 20 % representa el límite superior del crecimiento libre sin mortalidad. La Figura 4 muestra las guías de densidad obtenidas a partir de los mejores ajustes mediante RFE.

guides, eliminating the subjectivity involved in the act of sampling stands with evident high density (*i.e.*, where mortality is attributable to high density). This method may be a better analytical tool for Mexican forestry because there is lack of continuous measurement inventories, and the most common is to have data from temporary measurement sites, which in turn come from operational management plans. The density diagrams developed in this study suggest that thinning for the selected stands should be strong (50 % of living stems in each intervention). The density diagrams are a helpful tool for planning the *Pinus patula* even-aged stand density management in Zacualtipán, Hidalgo, Mexico.

—End of the English version—



## CONCLUSIONES

El método de regresión de frontera estocástica ofrece una alternativa para estimar de forma eficiente el límite superior del auto-aclareo, siendo coherente con lo sugerido por la teoría sobre poblaciones en densidad máxima. Una de sus ventajas es poder ampliar considerablemente la cantidad de datos útiles para la construcción de guías de densidad, eliminando la subjetividad que implica solamente muestrear rodales con densidad máxima evidente (es decir donde la mortalidad presente es atribuible a una alta

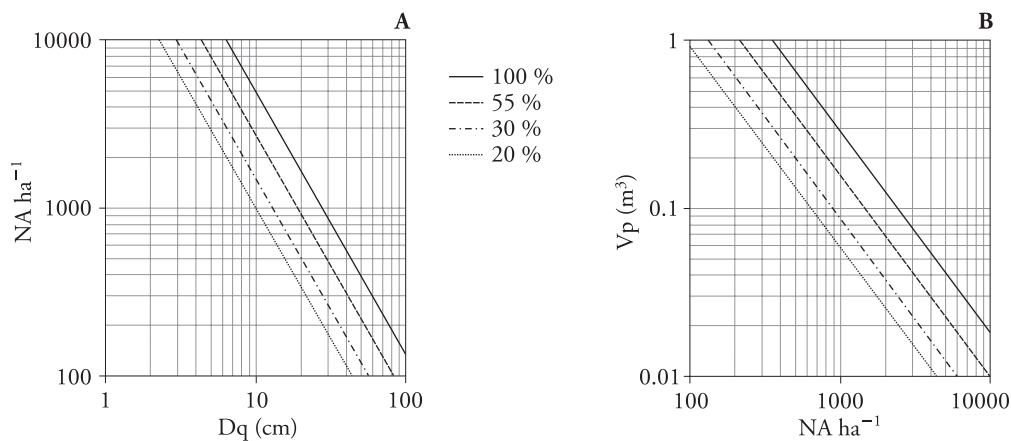


Figura 4. Guías para el control de la densidad basada en el IDR (A) e IDY (B) para rodales de *Pinus patula* en Zacualtipán, Hidalgo.

Figure 4. Diagrams for density control based on SDI (A) and YDI (B) for *Pinus patula* stands in Zacualtipán, Hidalgo.

densidad). Este método puede ser una mejor herramienta analítica para la silvicultura mexicana porque hay carencia de inventarios de medición continua, y lo más común es contar con datos provenientes de sitios temporales de medición, a su vez procedentes de planes de manejo operativo. Las guías construidas sugieren además que la intensidad de aclareo para estos rodales debe ser generalmente fuerte (50 % de los fustes vivos en cada intervención). Las guías de densidad construidas constituyen una herramienta de ayuda para planificar el manejo de la densidad de rodales coetáneos de *Pinus patula* en la región de Zacaualtipán, Hidalgo, México.

### LITERATURA CITADA

- Aigner, D., C. A. K. Lovell, and P. Schmidt. 1977. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *J. Econ.* 6: 21-37.
- Bi, H., G. Wan, and N. D. Turvey. 2000. Estimating the self-thinning boundary line as a density-dependent stochastic biomass frontier. *Ecology* 81: 1477-1483.
- Bi, H. 2001. The self-thinning surface. *For. Sci.* 47: 361-370.
- Bi, H. 2004. Stochastic frontier analysis of a classic self-thinning experiment. *Austral Ecol.* 29: 408-417.
- Brescia, V., D. Lema, y E. Barrón. 2003. Dinámica de producción y eficiencia en empresas agrícolas. Metodología para el análisis de datos en panel. Documento de Trabajo N° 29. INTA. 38 p.
- Cao, Q. V., and T. J. Dean. 2008. Using segmented regression to model the density-size relationship in direct-seeded slash pine stands. *For. Ecol. Manage.* 255: 948-952.
- Comeau, P. G., M. White, G. Kerr, and S. E. Hale. 2010. Maximum density-size relationships for Sitka spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. *Forestry* 83: 461-468.
- Cummings, W., E. Jones, D. Reed, and T. Drummer. 2001. Frontier function analysis to estimate the maximum relative growth rate of red pine (*Pinus resinosa*, Ait.) in northern Michigan. Proceedings of IUFRO S4.11 conference on Biometry, Modelling and Information Science, University of Greenwich, London, UK. 8 p.
- Daniel, T. W., J. A. Helms, and F. S. Baker. 1979. Principles of Silviculture. Second Edition. McGraw-Hill. New York, USA. 500 p.
- Del Río, M., G. Montero, and F. Bravo. 2001. Analysis of diameter-density relationships and self-thinning in non-thinned even-aged Scots pine stands. *For. Ecol. Manage.* 142: 79-87.
- Drew, T. J., and J. W. Flewelling. 1979. Stand density management: an alternative approach and its application to Douglas-fir plantations. *For. Sci.* 25: 518-532.
- Gezan, S. A., A. Ortega, y E. Andenmatten. 2007. Diagramas de manejo de densidad para renovales de roble, raulí y coigüe en Chile. *Bosque* 28: 97-105.
- Husch, B., C. I. Miller, and T. W. Beers. 1982. Forest Mensuration. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA. 402 p.
- Kumbhakar, S. C., and C. A. K. Lovell. 2000. Stochastic Frontier Analysis. Cambridge University Press. New York, USA. 333 p.
- Long, J. N., and J. D. Shaw. 2005. A density management diagram for even-aged ponderosa pine stands. *Western J. Appl. For.* 20: 205-215.
- Montero, M. M., H. M. De los Santos-Posadas, y M. Kanninen. 2007. *Hyeronima alchorneoides*: ecología y silvicultura en Costa Rica. Serie técnica. Informe técnico/CATIE no. 354. Turrialba. Costa Rica. 50 p.
- Pretzsch, H., and P. Biber. 2005. A re-evaluation of Reineke's rule and stand density index. *For. Sci.* 51: 304-320.
- Pretzsch, H. 2009. Forest Dynamics, Growth and Yield: From Measurement to Model. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Germany. 664 p.
- Reineke, L. H. 1933. Perfecting a stand-density index for even-aged forests. *J. Agric. Res.* 46: 627-638.
- SAS Institute Inc. 2011. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- Smith, D. M., B. C. Larson, M. J. Kelty, and P. M. S. Ashton. 1997. The Practice of Silviculture: Applied Forest Ecology. Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA. 537 p.
- Torres, R. J. M., y O. S. T. Magaña. 2001. Evaluación de Plantaciones Forestales. Editorial. Limusa. México. 472 p.
- Vacchiano, G., R. Motta, J. N. Long, and J. D. Shaw. 2008. A density management diagram for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.): A tool for assessing the forest's protective effect. *For. Ecol. Manage.* 255: 2542-2554.
- Yoda, K., T. Kira, H. Ogawa, and K. Hozumi. 1963. Self-thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions (Intraspecific competition among higher plants XI). *J. Institute Polytech. Osaka City University, Series D.* 14: 107-129.
- Zeide, B. 1987. Analysis of the 3/2 power law of self-thinning. *For. Sci.* 33: 517-537.
- Zhang, L., H. Bi, J. H. Gove, and L. S. Heath. 2005. A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line. *Can. J. For. Res.* 35: 1507-1514.