

SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN PARA *Pinus cooperi* Blanco EN DURANGO, MÉXICO

COMPATIBLE TAPER-VOLUME SYSTEM FOR *Pinus cooperi* Blanco IN DURANGO, MÉXICO

Francisco Cruz-Cobos¹, Héctor M. De los Santos-Posadas^{2*} y J. René Valdez-Lazalde²

¹Instituto Tecnológico Forestal de El Salto, Durango. (fcruz@colpos.mx). ²Forestal. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. 56230, Montecillo, Estado de México. (hmsantos@colpos.mx), (valdez@colpos.mx)

RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un sistema compatible de volumen comercial y ahusamiento para estimar volumen sin corteza de *Pinus cooperi* Blanco. El sistema se basó en un modelo lineal polinómico previamente usado en Durango, México, y modificado en función de los datos para añadir flexibilidad. El modelo de volumen total obtenido a partir del sistema aproxima en su estructura al modelo de volumen total de Schumacher y Hall. Las ecuaciones se ajustaron como un sistema completamente simultáneo para compensar la variación entre ahusamiento y volumen comercial acumulado que se da en cualquier punto del fuste. La estructura incluye efectos mixtos (EM) para controlar la variabilidad debida al árbol, corregir heterocedasticidad y lograr predicciones precisas en árboles de alto valor comercial. La información adicional que provee la estructura de EM mejora notablemente la capacidad predictiva en la parte baja del fuste. Adicionalmente, el ajuste simultáneo del sistema de ahusamiento-volumen mediante EM reduce los errores estándares de los estimadores de los parámetros.

Palabras clave: Análisis troncales, efectos aleatorios, sistema de ecuaciones.

INTRODUCCIÓN

El volumen maderable de un árbol se estima usualmente a través de dos tipos de ecuaciones: de volumen o de ahusamiento; si el ahusamiento es el coeficiente de estrechamiento del diámetro a lo largo del fuste, es posible estimar directamente mediante una ecuación el diámetro a cualquier altura y la altura a cualquier diámetro (Clutter *et al.*, 1983; Torres *et al.*, 1993). Una vez definida la ecuación de ahusamiento es posible, mediante su integración matemática, obtener estimaciones del volumen total o parcial del fuste a cualquier límite de longitud o diámetro mínimo deseado (Lynch *et al.*, 1992). Alternativamente, si se desea evitar la integración se pueden ajustar modelos de volumen comercial y usarse directamente

ABSTRACT

The development of a compatible taper-volume system is presented for estimating volume without bark of *Pinus cooperi* Blanco. The system was based on a polynomial linear model previously used in Durango, México, and modified as a function of the data to add flexibility. The model of total volume obtained from the system approximates in its structure the total volume model of Schumacher and Hall. The equations were adjusted as a completely simultaneous system to compensate for the variation between taper and accumulated marketing volume, which occurs at any point of the bole. The structure includes mixed effects (ME) to control the variability due to the tree, correct heterocedasticity and to obtain precise predictions in trees of high commercial value. The additional information provided by the structure of ME noticeably improves the predictive capacity in the lower part of the bole. In addition, the simultaneous fit of the taper-volume system by means of ME reduces the standard errors of the estimators of the parameters.

Key words: Stem analyses, random effects, equations system.

INTRODUCTION

The merchantable volume of a tree is usually estimated through two types of equations: of volume or of taper; if the taper is the coefficient of narrowing of the diameter along the bole, it is possible to estimate directly through an equation the diameter at any height and the height at any diameter (Clutter *et al.*, 1983; Torres *et al.*, 1993). Once the taper equation is defined, it is possible, by its mathematical integration, to obtain estimations of the total or partial volume of the bole at any limit of length or minimum diameter (Lynch *et al.*, 1992). Alternatively, if we wish to avoid integration, merchantable volume models can be fit and used directly for the cubing of the stand, where there is an implicit taper equation (Demaerschalck, 1973; Clutter, 1980). When there is a pair of equations of volume and taper defined by the same parameters and a common geometric structure, it is possible to define a compatible system of taper-volume.

*Autor responsable.

Recibido: Junio, 2007. Aprobado: Marzo, 2008.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 42: 473-485. 2008.

para la cubicación del arbolado en pie, donde existe una ecuación de ahusamiento implícita (Demaerschallck, 1973; Clutter, 1980). Cuando se tiene un par de ecuaciones de volumen y ahusamiento definidas por los mismos parámetros y una estructura geométrica común es posible definir un sistema compatible de ahusamiento-volumen.

El ajuste de un sistema compatible volumen-ahusamiento puede darse mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o como un sistema de ecuaciones simultáneas. Al ajustar el sistema ahusamiento-volumen con métodos como ecuaciones aparentemente no relacionadas y máxima verosimilitud con información completa (SUR y FIML por sus siglas en inglés) los estimadores de los parámetros son consistentes, ya que se ajusta simultáneamente el ahusamiento y el volumen acumulado, lo cual representa una ventaja. Contrariamente, bajo MCO el modelador debe decidir si se minimiza el error en la ecuación de ahusamiento o en la de volumen comercial, pero no en ambas (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000).

El ajuste como un sistema de ecuaciones simultáneas puede complementarse con la adición de efectos aleatorios bajo el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM). En los modelos de volumen-ahusamiento el análisis mediante MEM permite un uso más eficiente de los datos al controlar la variación aleatoria individual y desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación; además, es posible usar estimaciones de los efectos aleatorios para tener predicciones más precisas (Fang y Bailey, 2001).

El objetivo del presente trabajo fue generar un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus cooperi*, especie que aporta el mayor volumen y valor a la producción maderable en el Estado de Durango debido a buenas características tecnológicas y largos fustes limpios. El ajuste se hizo con modelos de efectos mixtos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Datos de volumen y ahusamiento

La investigación se efectuó en los predios La Vaca, El Embudo y El Hueco también conocido como Navíos, cubriendo una superficie forestal de 2264 ha en el municipio de Durango, Durango, México. Los predios se localizan entre 104° 59' 44" y 105° 05' 42" O y 23° 55' 10" y 24° 01' 00" N, con una altitud promedio de 2500 m y una temperatura promedio anual de 15° C. Las especies de árboles son del género *Pinus* y *Quercus*, entre las que destacan por su valor económico y volumen de aprovechamiento, *P. cooperi* Blanco, *P. leiophylla* Sch. et Cham, *P. teocote* Sch. et Cham y *P. engelmannii* Carr.

Se obtuvieron datos de 29 análisis troncales de *P. cooperi* Blanco siguiendo la técnica reportada por Manzanilla (1981); para ello se

The fit of a compatible taper-volume system can be obtained through ordinary least squares (OLS) or as a system of simultaneous equations. When the taper-volume system is fit by means of methods such as seemingly unrelated equations and full information maximum likelihood (SUR and FIML), the estimators of the parameters are consistent, given that taper and accumulated volume are fit simultaneously, which represents an advantage. In contrast, under OLS the modeler should decide whether to minimize the error in the taper equation or in that of merchantable volume, but not in both (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000).

The fit as a system of simultaneous equations can be complemented with the addition of random effects under the focus of mixed effects models (MEM). In the volume-taper models, the analysis through MEM permits a more efficient use of the data by controlling the individual random variation and displacing the problems of heterocedasticity and autocorrelation; furthermore, it is possible to use estimations of the random effects to have more precise predictions (Fang and Bailey, 2001).

The objective of the present study was to generate a compatible system of taper and merchantable volume for *Pinus cooperi*, a species which provides the most volume and value to timber production in the State of Durango because of its abundance, good technological characteristics and clean long boles. The fit was made with models of mixed effects.

MATERIALS AND METHODS

Data of volume and taper

The investigation was carried out in the lots of La Vaca, El Embudo and El Hueco, also known as Navíos, covering a forest surface of 2264 ha in the municipality of Durango, Durango, México. The lots are located between 104° 59' 44" and 105° 05' 42" W and 23° 55' 10" and 24° 01' 00" N, with an average altitude of 2500 m and an average annual temperature of 15° C. The tree species are of the genus *Pinus* and *Quercus*, among which *P. cooperi* Blanco, *P. leiophylla* Sch. et Cham, *P. teocote* Sch. et Cham and *P. engelmannii* Carr are outstanding for their economic value and wood volume.

Data were obtained of 29 stem analyses of *P. cooperi* Blanco following the technique reported by Manzanilla (1981); for this purpose trees free of physical or mechanical damage were selected from all of the categories of diameter and height present. For the calculations of cubing, the overlapping logs method was used, which makes it possible to obtain more precise total and partial volumes (Bailey, 1995). The data of taper and accumulated volume are shown in Figure 1. In addition, data were obtained of 10 trees of the same species collected from the Ejido La Victoria near the area of study; these were felled trees, and additional information was obtained of

seleccionaron árboles sin daño físico o mecánico de todas las categorías de diámetro y alturas presentes. Para los cálculos de cubicación se usó el método de trozas traslapadas que permite obtener volúmenes totales y parciales más precisos (Bailey, 1995). Los datos de ahusamiento y volumen acumulado se presentan en la Figura 1. Además se tuvo datos de 10 árboles de la misma especie recolectados del predio Ejido La Victoria cercano al área en estudio; eran árboles derribados, de los cuales se obtuvo el diámetro a la altura del tocón y a 2 m. Los datos se usaron para validar y probar las metodologías propuestas.

Desarrollo del modelo compatible ahusamiento-volumen

Para generar el sistema compatible de ahusamiento-volumen se tomó como base el modelo de ahusamiento Cielito 1 (Rentería, 1995), con el que se han obtenido buenos ajustes en *P. cooperi* Blanco en Durango, y en otras especies del Estado de Chihuahua (Corral *et al.*, 1999). Para Durango este modelo se ajustó a partir de la altura del tocón y del diámetro normal, dando mejores resultados en el segundo caso; sin embargo, dos de sus parámetros no fueron estadísticamente significativos. En Chihuahua se ajustó el modelo sólo a partir del diámetro normal. El modelo Cielito 1 es lineal:

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \tag{1}$$

donde, d =diámetro sin corteza (cm) a una altura dada (h), así $d=0$ cuando $h=H$; D =diámetro normal (cm) a $h=1.3$ m; $x=(H-h)/H$; h =altura del fuste al diámetro (d); H =altura total a la punta (m); β_i =parámetros del modelo.

Para calcular el volumen de una troza (V_{troza}) a cierta altura del fuste se integra el diámetro d a lo largo de la sección deseada como un sólido en revolución mediante una expresión de la forma:

$$V_{troza} = k \int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial h \tag{2}$$

donde, $k = \frac{\pi}{40000}$ es la constante volumétrica cuando d está expresado en centímetros y la longitud de la troza en metros, y ∂d es el diferencial sobre la altura del fuste.

Despejando d^2 de la Ecuación (1) y sustituyendo en la Ecuación (2) se tiene:

$$V_{troza} = kD^2 \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_1 \left(\frac{H-h}{H}\right) + \beta_2 \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{H-h}{H}\right)^3 \right) \partial h \tag{3}$$

Así, el volumen de una troza (V_{troza}) definida entre dos alturas del fuste h_2 y h_1 es:

diameters at stump height and at 2 m. The data were used to validate and prove the proposed methodologies.

Development of the compatible taper-volume model

To generate the compatible taper-volume system, the taper model Cielito 1 (Rentería, 1995) was used as the base, with which good fits have been obtained in *P. cooperi* Blanco in Durango, and in other species in the state of Chihuahua (Corral *et al.*, 1999). For Durango, this model was fit from the stump height and the normal diameter, giving better results in the latter case; however, two of its parameters were not statistically significant. In Chihuahua the model was fit only from normal diameter. The Cielito 1 model is linear:

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \tag{1}$$

where, d =diameter without bark (cm) at a given height (h), thus $d=0$ when $h=H$; D =normal diameter (cm) to $h=1.3$ m; $x=(H-h)/H$

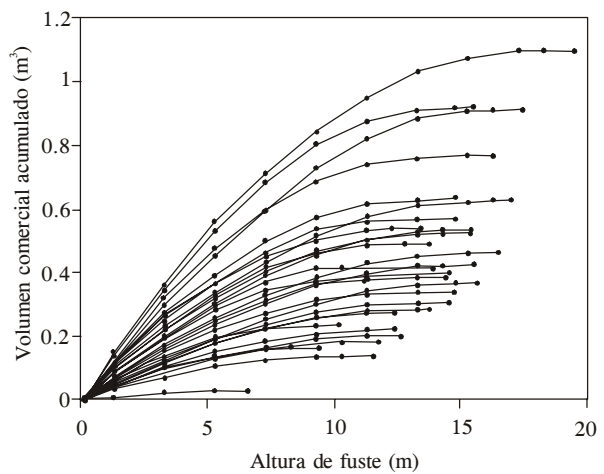
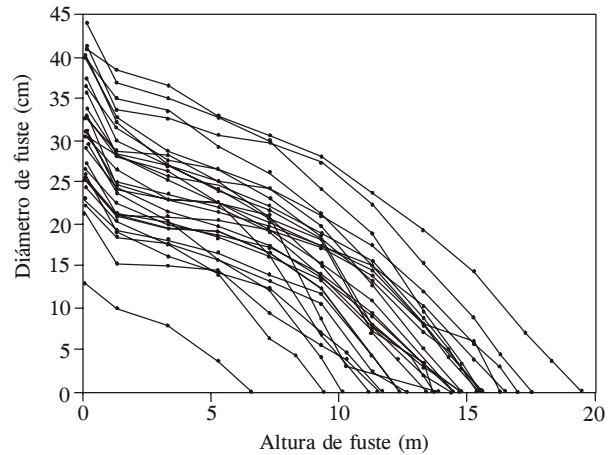


Figura 1. Diámetro sobre el fuste y volumen comercial vs. altura del fuste para los árboles muestreados.

Figure 1. Diameter over the bole and merchantable volume vs. bole height for the sampled trees.

$$V_{\text{troza}} = kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (4)$$

Si guiendo este desarrollo, el volumen total del fuste (V), del tocón a la punta, se define como:

$$V = kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=0}^{h_2=H} \\ = \frac{k}{12} D^2 H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \quad (5)$$

La Ecuación (5) se puede reducir a la forma $V = \alpha D^2 H$, expresión que representa el modelo de factor de forma constante.

Sin embargo, la ecuación de ahusamiento Cielito 1 (1), y en consecuencia su correspondiente ecuación compatible de volumen (5), presentan dos aspectos poco deseables:

1) La normalidad de la variable a ajustar. El modelo Cielito 1 utiliza como variable dependiente a $\left(\frac{d}{D}\right)^2$, variable no normal que restringe sus valores entre cero y uno; por tanto, la estructura no lineal propuesta bajo MCO debe ser más eficiente tanto en ajuste como para caracterizar sus parámetros sin tener que recurrir a un ajuste bajo modelos lineales generalizados.

2) Restricciones del ajuste. Aunque el modelo no restringe el ahusamiento a $d=D$, el ajuste se hace de forma tal que cuando $h=1.3$ m entonces $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1$ haciendo que $d^2 \cong D^2$, donde, $\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \cong 1$. Sin embargo, restringir en dos puntos una ecuación de ahusamiento puede resultar en comportamientos ilógicos; por ejemplo, para predicciones donde $h > 1.3$ m es posible que $d^2 > D^2$.

Dado que la ecuación busca estimar diámetros decrecientes a partir de D , el cual es el único diámetro conocido, esta condición debe cambiarse por una que garantice que para todo $h > 1.3$ m, $d < D$. Esto se logra con la incorporación del nuevo parámetro (δ) que asociado a la variable diámetro normal flexibiliza las condiciones de ajuste del modelo:

Así, el modelo de ahusamiento propuesto (Cielito 1 Modificado) es:

$$\left(\frac{d^2}{D^\delta}\right) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ de donde } d^2 = D^\delta [\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3]$$

Así, el modelo de ahusamiento propuesto (Cielito 1 Modificado) es:

$$d = \sqrt{D^\delta (\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3)} \quad (6)$$

$H; h$ = bole height at diameter (d); H = total height at the point (m); β_i = parameters of the model.

To calculate the volume of a log (V_{log}) at a certain bole height, the diameter d is integrated along the desired section as a solid in revolution through an expression of the form:

$$V_{\text{troza}} = k \int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial h \quad (2)$$

where, $k = \frac{\pi}{40000}$ is the volumetric constant when d is expressed in centimeters and the length of the log in meters, and ∂d is the differential over the height of the bole.

Solving for d^2 from Equation (1) and substituting in Equation (2), the following is obtained:

$$V_{\text{troza}} = kD^2 \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_1 \left(\frac{H-h}{H}\right) + \beta_2 \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{H-h}{H}\right)^3 \right) \partial h \quad (3)$$

Thus, the volume of a log (V_{log}) defined between two heights of the bole h_2 and h_1 is as follows:

$$V_{\text{troza}} = kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (4)$$

Following this development, the total volume of the bole (V), that is, from the stump to the tip, is defined as:

$$V = kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=0}^{h_2=H} \\ = \frac{k}{12} D^2 H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \quad (5)$$

Equation (5) can be reduced to the form $V = \alpha D^2 H$, expression that represents the model of the constant form factor.

However, the taper equation Cielito 1 (1), and consequently its corresponding compatible volume equation (5), present two undesirable aspects:

1) The normality of the variable to be fit. The model Cielito 1 uses

as dependent variable $\left(\frac{d}{D}\right)^2$, a non normal variable that restricts

its values between zero and one; therefore, the non linear structure proposed under OLS should be more efficient in both fit and for characterizing its parameters without having to resort to a fit under generalized linear models.

Es posible verificar que tanto V_{troza} como V son extensiones directas del desarrollo previo; así, la ecuación compatible de volumen para Cielito 1 Modificado es:

$$V_{troza} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (7)$$

$$V = \frac{k}{12} D^\delta H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \quad (8)$$

La Ecuación (8) es reducible a la forma $V = \alpha D^\delta H$, donde $\alpha = \frac{k}{12} (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3)$. La ecuación (8) es una aproximación a la estructura de Schumacher y Hall (1933) de la forma $V = \alpha D^\delta H^\gamma$, donde en este caso $\gamma = 1$.

De manera similar, la estructura de V_{troza} es modificable a una expresión de volumen comercial acumulado ($V_{comercial}$) definiendo los límites de integración de la siguiente forma:

$$V_{comercial} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=h_t}^{h_2=h_c} \quad (9)$$

donde, h_c es la altura sobre el tocón a la que se da el $V_{comercial}$ y h_t es la altura del tocón. Así la forma desarrollada de esta expresión es:

$$V_{comercial} = kD^\delta H^{-1} \left(\beta_1 \left(\left(Hh_c - \frac{h_c^2}{2} \right) - \left(Hh_t - \frac{h_t^2}{2} \right) \right) - \frac{\beta_2}{3H} \left((H-h_c)^3 - (H-h_t)^3 \right) - \frac{\beta_3}{4H^2} \left((H-h_c)^4 - (H-h_t)^4 \right) \right) \quad (10)$$

Con esta expresión se completa el sistema de ahusamiento - volumen comercial que al ajustar el ahusamiento implica el modelo de volumen comercial y viceversa.

Toda función de ahusamiento debe permitir el cálculo de la altura a la cual se da el diámetro mínimo comercial deseado, lo cual es particularmente útil para nuestra ecuación de $V_{comercial}$. Sin embargo, para el sistema propuesto la solución de h en la Ecuación (6) presenta el inconveniente de manejar raíces imaginarias que se pueden reducir hasta desaparecer durante la simplificación algebraica, una vez que se sustituyen los valores del ajuste. Dado el trabajo teórico implicado y el hecho de que no todos los paquetes convencionales pueden resolver una raíz imaginaria, se decidió que es más práctico el cálculo numérico de la solución de x_i iterando la expresión:

2) Restrictions of the fit. Although the model does not restrict the taper to $d=D$, the fit is made in such a way that when $h = 1.3$ m,

then $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1$ making $d^2 \cong D^2$, where, $\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \cong 1$.

However, restricting a taper equation in two parts can result in illogical behavior; for example, for predictions where $h > 1.3$ m, it is possible that $d^2 > D^2$.

Given that the equation seeks to estimate decreasing diameters from D , which is the only known diameter, this condition should be changed for one that guarantees that for everything $h > 1.3$ m. This is achieved with the incorporation of the new parameter (δ) which associated to the normal diameter variable flexibilizes the conditions of fit of the model:

$$\left(\frac{d^2}{D^\delta}\right) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ de donde } d^2 = D^\delta [\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3]$$

Thus, the proposed taper model (Modified Cielito 1) is as follows:

$$d = \sqrt{D^\delta (\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3)} \quad (6)$$

It is possible to verify that both V_{troza} and V are direct extensions of the previous development; thus, the compatible volume equation for Modified Cielito 1 is:

$$V_{troza} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (7)$$

$$V = \frac{k}{12} D^\delta H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \quad (8)$$

Equation (8) is reducible to the form $V = \alpha D^\delta H$, where $\alpha = \frac{k}{12} (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3)$. Equation (8) is an approximation to the structure of Schumacher and Hall (1933) of the form $V = \alpha D^\delta H^\gamma$, where in this case $\gamma = 1$.

Similarly, the structure of V_{troza} is modificable to an expression of accumulated merchantable volume ($V_{comercial}$) defining the integration limits of the following form:

$$V_{comercial} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=h_t}^{h_2=h_c} \quad (9)$$

$$x_i = \frac{d^2}{\beta_1 + \beta_2 x_{i-1} + \beta_3 x_{i-1}^2} \quad (11)$$

que con una tolerancia definida (ξ), dada por $|x_i - x_{i-1}| \leq \xi$ permite calcular el valor de x para d y D dados. Es posible verificar que cualquier valor inicial positivo para x_{i-1} produce valores que convergen en un valor positivo menor de uno donde obviamente $h = H(1-x)$.

Estrategia de ajuste

Para facilitar la discusión sobre el ajuste del sistema compatible propuesto se abrevia la Ecuación (6) como $d_{ij} = f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ y la Ecuación 10 como $V_{ij} = g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$, donde $f(\cdot)$ define la estructura del modelo de ahusamiento y $g(\cdot)$ al modelo de volumen comercial, \mathbf{p} es el vector de parámetros $\mathbf{p} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta)$ estimables del sistema y d_{ij} es el diámetro del i -ésimo árbol observado a la h_{ij} altura sobre el fuste. De igual manera para el volumen acumulado V_{ij} .

El sistema de ecuaciones propuesto puede ajustarse más eficientemente si se permite la inclusión de efectos aleatorios. Así, es posible mejorar las características de los parámetros al compensar por el efecto de variables tomadas en una misma unidad experimental y simultáneamente ajustar los datos de ahusamiento-volumen. Esto es posible usando una estructura bivariada con efectos aleatorios. Tomando como base la formulación de Hall y Clutter (2004), el sistema compatible ahusamiento-volumen, se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) \end{pmatrix} + e_i \quad (12)$$

donde, d_i es el vector de observaciones de ahusamiento en el i -ésimo árbol; V_i es el vector de observaciones de volumen comercial en el i -ésimo árbol y:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta + b_i$$

quedando definidos los efectos aleatorios del modelo por:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2 I) \text{ y } b_{2i} \sim N(0, \phi^2)$$

Así se tiene un solo parámetro con efectos mixtos de la forma $\beta_2 + b_{2i}$ y la estructura de e_i hasta este punto se asume como homocedástica ($\sigma^2 I$), pero puede flexibilizarse a nivel de componente (ahusamiento o volumen) para modelar tanto heterocedasticidad como autocorrelación por componente.

where h_c is the height over the stump to which the $V_{comercial}$ is given and h_t is the stump height. Thus, the developed form of this expression is:

$$V_{comercial} = kD^\delta H^{-1} \left(\begin{aligned} & \beta_1 \left(\left(Hh_c - \frac{h_c^2}{2} \right) - \left(Hh_t - \frac{h_t^2}{2} \right) \right) \\ & - \frac{\beta_2}{3H} \left((H - h_c)^3 - (H - h_t)^3 \right) \\ & - \frac{\beta_3}{4H^2} \left((H - h_c)^4 - (H - h_t)^4 \right) \end{aligned} \right) \quad (10)$$

This expression completes the system of taper - merchantable volume which when taper is fit, implies the model of merchantable volume and vice-versa.

Every taper function should allow the calculation of the height at which the desired minimum merchantable diameter is given, which is especially useful for our equation of $V_{comercial}$. However, for the proposed system the solution of h in Equation (6) presents the inconvenience of using imaginary roots which can be reduced until disappearing during the algebraic simplification, once the adjustment values are substituted. Given the theoretical work implied and the fact that not all of the conventional computer packages can solve an imaginary root, it was decided that the numerical calculation of the solution of x_i is more practical, iterating the following expression:

$$x_i = \frac{d^2}{\beta_1 + \beta_2 x_{i-1} + \beta_3 x_{i-1}^2} \quad (11)$$

that with a defined tolerance (ξ), given by $|x_i - x_{i-1}| \leq \xi$ makes it possible to calculate the value of x for given d and D . It is possible to verify that any positive initial value for x_{i-1} produces values that converge in a positive value less than one where obviously $h = H(1-x)$.

Fitting strategy

To facilitate the discussion of the fitting of the proposed compatible system, Equation (6) is abbreviated as $d_{ij} = f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ and Equation 10 as $V_{ij} = g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ where $f(\cdot)$ defines the structure of the taper model and $g(\cdot)$ defines the merchantable volume model, \mathbf{p} is the vector of estimable parameters $\mathbf{p} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a})$ of the system and d_{ij} is the diameter of the i -th tree observed at the h_{ij} height over the bole. The same follows for the accumulated volume V_{ij} .

The proposed system of equations can be fit more efficiently if the inclusion of random effects is allowed. Thus, it is possible to improve the characteristics of the parameters when compensating for the effect of variables taken in the same experimental unit and simultaneously fitting the data of taper-volume. This is possible using

Para observar el efecto de las modificaciones realizadas al modelo original de ahusamiento Cielito 1, inicialmente se ajustaron las ecuaciones de ahusamiento (1) y (6) y las de volumen (4) y (10) por separado a través de MCO. Luego se ajustó el sistema propuesto de manera simultánea y con efectos mixtos bajo el método de Máxima Verosimilitud Restringida (RMV).

Los modelos de volumen ajustados considerando efectos mixtos ofrecen ventajas sobre la regresión tradicional (MCO) cuando se requieren predicciones altamente precisas para árboles de gran valor comercial. Lo anterior se logra sin tener que modificar la estructura del modelo para incluir observaciones adicionales; esto es posible ya que los datos pueden usarse para estimar los efectos aleatorios específicos del individuo e incorporarlos directamente en nuestra predicción.

Para ejemplificar el uso del modelo de efectos mixtos cuando se dispone de información a priori de un árbol se parte de la información básica para nuestro sistema ahusamiento-volumen, es decir del diámetro normal (D) y la altura total (H). Si adicionalmente se conoce la altura del tocón (h_t) y el diámetro a esta altura (d_t), un diámetro adicional medido a una altura por encima de 1.3 m (d) y la altura a tal diámetro (h_d), se tiene información suficiente para estimar el valor b_{2i} específico de ese árbol y usarlo en las estimaciones. Simplificando la notación de Fang y Bailey (2001) para el caso particular del sistema de ahusamiento-volumen propuesto, es posible entonces estimar el efecto aleatorio específico con el vector de información adicional:

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_t, D, d)^T \\ (0, V_D, V_d)^T \end{pmatrix}$$

donde, d_0 es el vector de tres diámetros conocidos y V_0 es el vector de los volúmenes a esos diámetros.

Así el efecto específico por árbol puede estimarse como:

$$\hat{b}_{2i} = \phi \hat{Z}_k^T (\hat{Z}_k \phi \hat{Z}_k^T + \hat{\sigma}^2 \hat{R}_k)^{-1} \hat{e}_k$$

donde,

$$\hat{e}_k = \begin{pmatrix} d_0 \\ V_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(D, H, h_0; \beta) \\ g(k, D, H, h_0; \beta) \end{pmatrix} \text{ en este caso } h_0 = (h_t, 1.3, h_d)^T \text{ y}$$

$$\hat{Z}_k = \hat{F}_k^T B \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\hat{F}_k = \frac{\partial}{\partial \beta_2} \begin{pmatrix} f(D_i, H_i, h_i; \beta) & 0 \\ 0 & g(k, D_i, H_i, h_i; \beta) \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales del sistema β_2 respecto a corresponden a:

a bivariate structure with random effects. Taking as a base the formulation of Hall and Clutter (2004), the compatible taper-volume system can be expressed as follows:

$$\begin{pmatrix} d_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) \end{pmatrix} + e_i \quad (12)$$

where, d_i is the vector of observations of taper in the i -th tree; V_i is the vector of observations of merchantable volume in the i -th tree and:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta + b_i$$

being defined the random effects of the model by:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2 I) \text{ y } b_{2i} \sim N(0, \phi^2)$$

Hence, there is only one parameter with mixed effects of the form $\beta_2 + b_{2i}$ and the structure of e_i is assumed up to this point as homocedastic ($\sigma^2 I$), but it can be flexibilized at the component level (taper or volume) to model both heterocedasticity and autocorrelation per component.

To observe the effect of the modifications carried out on the original taper model Cielito 1, initially fits were made on the taper equations (1) and (6) and the volume equations (4) and (10) separately by means of OLS. Then the proposed system was fit simultaneously and with mixed effects under the method of Restricted Maximum Likelihood (RML).

The models of fitted volumes considering mixed effects offers advantages over the traditional regression (OLS) when highly precise predictions are required for trees of high merchantable value. The above is achieved without having to modify the structure of the model to include additional observations; this is possible given that the data can be used to estimate the specific random effects of the individual and incorporate them directly in our prediction.

To exemplify the use of the model of mixed effects when *a priori* information of a tree is available, the point of departure is the basic information for our taper-volume system, that is, from the normal diameter (D) and the total height (H). If additionally the stump height (h_t) is known and the diameter at this height (d_t), an additional diameter measured at a height over 1.3 m (d) and the height at this diameter (h_d), then there is enough information to estimate the specific value b_{2i} of this tree and to use it in the estimations. Simplifying the notation of Fang and Bailey (2001) for the particular case of the proposed taper-volume system, it is then possible to estimate the specific random effect with the vector of additional information:

$$\frac{\delta}{\delta\beta_2} f(.) = \frac{1}{2} \frac{D^\delta h_{ij}^2}{H_i^2 \sqrt{D_i^\delta \left(\frac{\beta_1 h_{ij}}{H_i} + \frac{\beta_2 h_{ij}^2}{H_i^2} + \frac{\beta_3 h_{ij}^3}{H_i^3} \right)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_2} g(.) = -kD_i^\delta H_i^{-1} \left(\frac{(H_i - h_{ij})^3 - (H_i - h_r)^3}{3H_i} \right)$$

Estas ecuaciones han sido simplificadas para el caso específico. La notación completa puede verse en Vonesh y Chinchilli (1997).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estructura original vs estructura propuesta

Aunque los resultados de los ajustes de los modelos de ahusamiento no son comparables dadas las diferentes escalas de la variable dependiente, es posible comparar valores como R² y el coeficiente de variación (CV). El modelo de ahusamiento modificado (6) tuvo un mayor valor de R² y un CV menor (Cuadro 1). El cambio en la estructura no sólo permite flexibilizar el ajuste por la adición de un parámetro sino que tiene consecuencias en la capacidad predictiva del mismo. Además, todos los parámetros son altamente significativos, en contraste con el modelo original (1) donde β₂ fue significativo a un valor de rechazo de 0.057. Para comparar los cuadrados medios de los errores (CME), se obtuvo un estimador del CME para el diámetro comercial (d) de la ecuación de ahusamiento (1), a partir de los resultados del ajuste de dicha ecuación, bajo la siguiente manipulación algebraica:

Si $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$ entonces

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_t, D, d)^T \\ (0, V_D, V_d)^T \end{pmatrix}$$

where, d₀ is the vector of three known diameters and V₀ is the vector of the volumes at these diameters.

Thus, the specific effect per tree can be estimated in the following way:

$$\hat{b}_{2i} = \phi \hat{Z}_k^T (\hat{Z}_k \phi \hat{Z}_k^T + \hat{\sigma}^2 \hat{R}_k)^{-1} \hat{e}_k$$

where,

$$\hat{e}_k = \begin{pmatrix} d_0 \\ V_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(D, H, h_0; \beta) \\ g(k, D, H, h_0; \beta) \end{pmatrix} \text{ in this case } h_0 = (h_t, 1.3, h_d)^T \text{ and}$$

$$\hat{Z}_k = \hat{F}_k^T B \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$\hat{F}_k = \frac{\partial}{\partial\beta_2} \begin{pmatrix} f(D_i, H_i, h_i; \beta) & 0 \\ 0 & g(k, D_i, H_i, h_i; \beta) \end{pmatrix}$$

The partial derivates of the system with respect to β₂ correspond to:

$$\frac{\delta}{\delta\beta_2} f(.) = \frac{1}{2} \frac{D^\delta h_{ij}^2}{H_i^2 \sqrt{D_i^\delta \left(\frac{\beta_1 h_{ij}}{H_i} + \frac{\beta_2 h_{ij}^2}{H_i^2} + \frac{\beta_3 h_{ij}^3}{H_i^3} \right)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_2} g(.) = -kD_i^\delta H_i^{-1} \left(\frac{(H_i - h_{ij})^3 - (H_i - h_r)^3}{3H_i} \right)$$

Cuadro 1. Parámetros estimados, errores estándar (S_β) y S_β) y niveles de significancia muestral (α) para las ecuaciones de ahusamiento Cielito 1 (1) y Cielito 1 Modificada (6), ajustadas por MCO.

Table 1. Estimated parameters, standard errors (S_β and S_β) and levels of sampling significance (á) for the taper equations Cielito 1 (1) and Modified Cielito 1 (6), fit by OLS.

Modelo	Parámetros estimados						
	β ₁	β ₂	β ₃	δ	CME	R ²	CV
1	1.1488	-0.7679	1.0111	-	-	-	-
					0.014	0.9378	21.02
	S _{β₁}	0.1350	0.4018	0.2838	-	-	-
	α	<0.0001	0.0571	0.0004	-	-	-
6	0.6054	4.2572	-2.1065	1.769	-	-	-
					3.534	0.971	10.98
	S _{β₁}	0.1651	0.8973	0.5468	0.053	-	-
	α	0.0003	<0.0001	0.0001	<0.0001	-	-

$\hat{d} = D\sqrt{\beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3}$. De esta manera el estimador del CME resulta de la expresión

$$CME = \sum_{i=1}^n (\hat{d}_i - d_i)^2 / n - 3, \text{ y el } CME=6.25, \text{ superior al del modelo modificado (3.5337).}$$

Si se observan los residuales de ambos modelos (Figura 2) se aprecia que en el modelo (1) existe un desajuste que tiende a sobreestimar sistemáticamente los diámetros en la punta y cercano a la base de los fustes, mientras que la estructura de los residuales del modelo (6) es mucho más deseable.

En cuanto a la ecuación compatible de volumen (10), también se observa que existen ganancias en la R², CME y niveles de significancia de los parámetros, comparados con la ecuación (4) de volumen original (Cuadro 2). Los residuales de ambos modelos presentan tendencias muy similares y problemas de heterocedasticidad (Figura 3).

Ajustes bajo MEM

Los parámetros estimados bajo RMV (Cuadro 3) para ahusamiento (6) y $V_{comercial}$ (10) muestran que al considerar la correlación contemporánea se puede reducir de manera considerable el error estándar de los parámetros del modelo, además de unificar los valores por componente. En estos estadísticos se puede apreciar que los estimadores de los parámetros β_i de la ecuación de volumen y de ahusamiento obtenidos simultáneamente con RMV presentan desviaciones estándar menores que los obtenidos con MCO (Cuadro 2 y 3), lo cual hace estos parámetros más eficientes.

Torres y Magaña (2001) mencionan que es común que la mayoría parte de los modelos de volumen

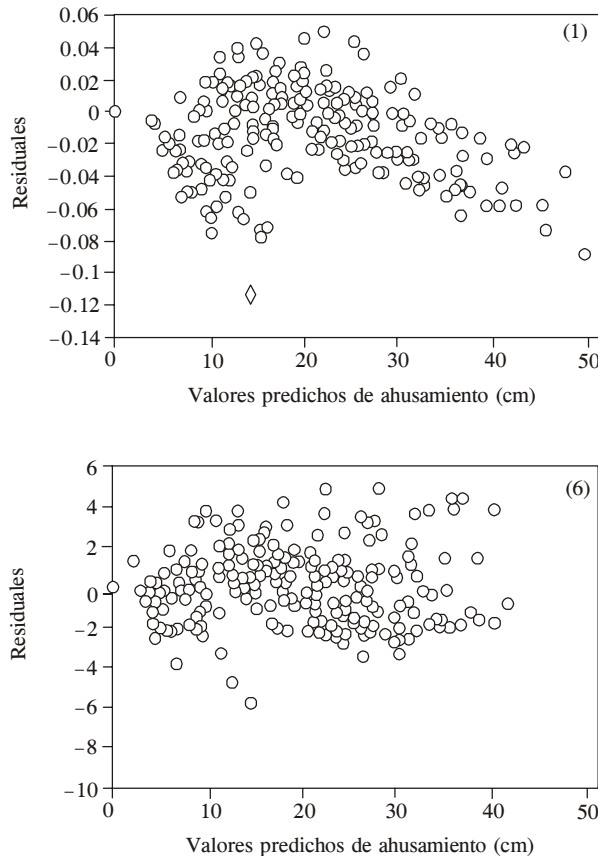


Figura 2. Dispersión de los residuales del modelo de ahusamiento Cielito 1 en su forma original (1) y modificada (6), ajustados por MCO.
Figure 2. Dispersion of the residuals of the taper model Cielito 1 in its original form (1) and modified form (6), fit by OLS.

These equations have been simplified for the specific case. The complete notation can be seen in Vonesh and Chinchilli (1997).

Cuadro 2. Parámetros estimados, errores estándar (S_{β_1} y S_{δ}) y nivel de significancia muestral (α) para las ecuaciones compatibles de volumen del modelo Cielito 1 (4) y Cielito 1 Modificado (10), ajustadas por MCO.

Table 2. Estimated parameters, standard errors (S_{β_1} and S_{δ}) and sample significance level (α) for the compatible volume equations of the model Cielito 1 (4) and Modified Cielito 1 (10), fit by OLS.

Modelo	Parámetros estimados					
	β_1	β_2	β_3	δ	CME	R ²
10	0.9456	3.7390	-2.4804	1.7875	0.0006	0.989
	S_{β_1} y S_{δ}	0.4000	1.4018	1.0913	0.0225	
	α	0.0088	0.0115	0.0239	<0.0001	
4	0.4472	1.8175	-1.2058		0.0009	0.9814
	S_{β_1}	0.1726	0.7016	0.6032		
	α	0.0109	0.0101	0.0467		

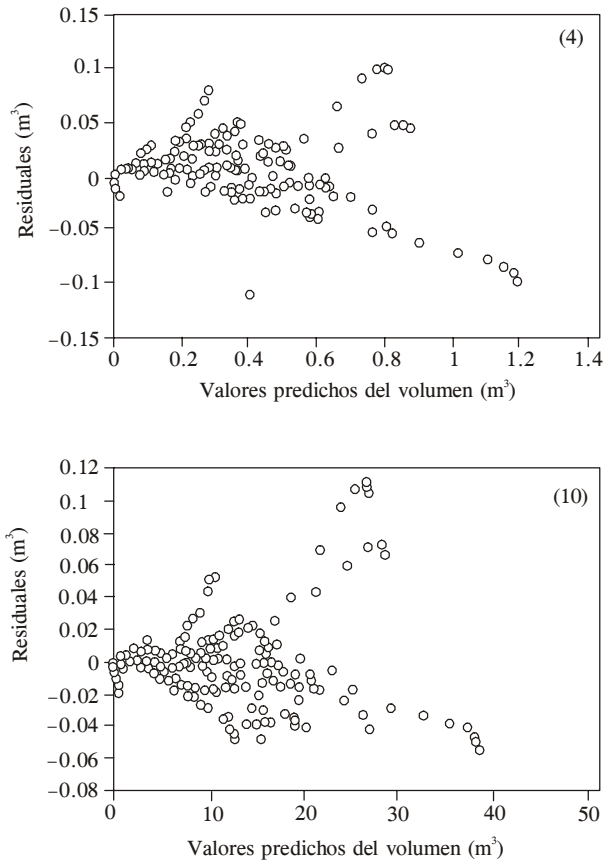


Figura 3. Dispersión de los residuales del modelo de volumen Cielito 1 en su forma original (4) y modificada (10), ajustados por MCO.

Figure 3. Dispersion of the residuals of the volume model Cielito 1 in its original form (4) and modified form (10), fit by OLS.

sufran problemas de heterocedasticidad dado que a mayores valores de diámetro y altura la variación en los volúmenes de los árboles se hace más grande. Este problema se puede observar en los residuales de las ecuaciones de volumen (4) y (10), ajustadas por MCO (Figura 3), por lo que recomienda corregir esta deficiencia. Sin embargo, al observar los residuales del sistema de ahusamiento-volumen propuesto ajustados simultáneamente (Figura 4) se nota que no existe tendencia de heterocedasticidad en ambos modelos, por lo que se confirma que el ajuste con efectos mixtos ayuda a reducir este problema (Fang y Bailey, 2001).

Estimación de efectos específicos con información adicional del inventario

Para validar la pertinencia de la estructura propuesta se usaron datos de diez árboles del Ejido La Victoria, los cuales fueron cubicados con la misma metodología que los usados para el ajuste. En estos árboles se

Cuadro 3. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos de ahusamiento y volumen, ajustados simultáneamente con efectos mixtos a través de RMV.

Table 3. Goodness of fit and estimated parameters for the models of taper and volume, fit simultaneously with mixed effects by means of RMV.

Modelo	Parámetro	Efectos fijos		
		Estimador	Error estándar	Significancia
12	β_1	0.4446	0.0984	<0.0001
	β_2	3.1648	0.5787	<0.0001
	β_3	-1.5582	0.3306	<0.0001
	δ	1.8585	0.0504	<0.0001
Efectos aleatorios				
Intervalo de confianza al 95%				
Modelo	Parámetro	Estimado	Superior	Inferior
12	σ	1.2976	1.3816	1.2189
	ϕ	0.1020	0.1776	0.0585
Modelo	CIA	CIB	log RMV	
12	1775.08	1800.5	-881.5377	

CIA es el Criterio de Información de Akaike y CIB es el Criterio de Información Bayesiano (Pinheiro y Bates, 2000).

RESULTS AND DISCUSSION

Original structure vs proposed structure

Although the results of the fits of the taper models are not comparable given the different scales of the dependent variable, it is possible to compare values such as the R^2 and the coefficient of variation (CV). The modified taper model (6) had a higher value of R^2 and a lower CV (Table 1). The change in structure not only makes it possible to flexibilize the fit by the addition of a parameter but also has consequences in the predictive capacity of the same. Furthermore, all of the parameters are highly significant, in contrast to the original model (1) where β_2 was significant at a rejection value of 0.057. To compare the mean squared of the errors (MSE), an estimator of the MSE was obtained for the merchantable diameter (d) of the taper equation (1), from the results of the fit of this equation, under the following algebraic manipulation:

If, $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$ entonces then

$\hat{d} = D\sqrt{\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3}$. In this way the estimator

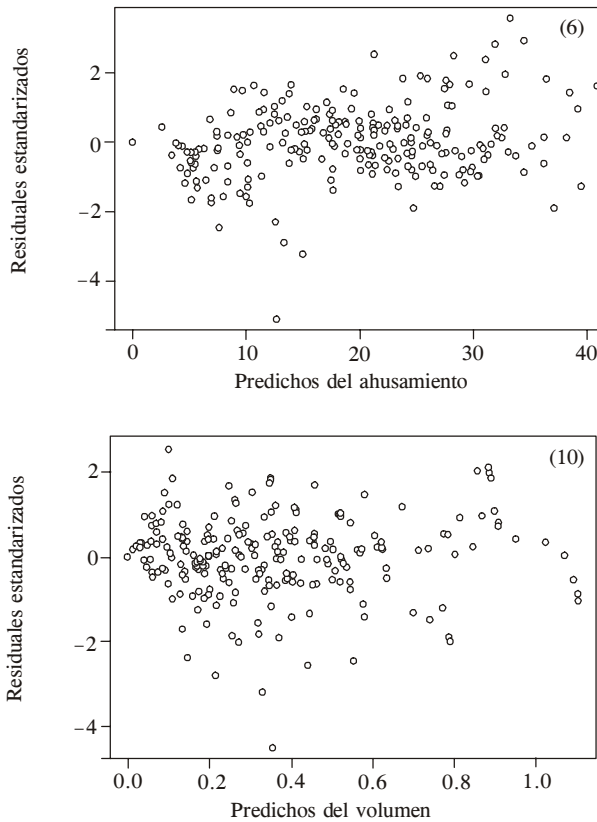


Figura 4. Dispersión de los residuales de la ecuación de ahusamiento (6) y volumen (10), ajustadas simultáneamente con efectos mixtos.

Figure 4. Dispersion of the residuals of the equation of taper (6) and volume (10), fit simultaneously with mixed effects.

midieron cuatro diámetros a alturas fáciles de medir en campo (altura del tocón, 0.6, 1.3 y 2.0 m); los diámetros normales de estos árboles oscilaban entre 24 y 40 cm con alturas totales entre 12 y 28 m. Se decidió comparar las predicciones a cuatro alturas comerciales medidas en pies 12 (3.67 m), 20 (6.11 m), 30 (9.17 m) y altura total con y sin el uso de la estructura de efectos aleatorios. Se usó como una medida de comparación de la eficiencia de ambos ajustes el sesgo, definido como

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (V_{ij} - \hat{V}_{ij}),$$

donde V_{ij} es el volumen

acumulado observado del i -ésimo árbol a la j -ésima altura y \hat{V}_{ij} el volumen estimado con y sin efectos aleatorios del i -ésimo árbol a la j -ésima altura.

Cuando se considera la variabilidad específica del árbol los volúmenes predichos son más precisos que los obtenidos con el modelo de efectos fijos hasta la altura comercial de 30 pies (Cuadro 4). Desde este punto el modelo con efectos fijos es más adecuado ya que la información adicional proporcionada corresponde

of the MSE is given with the following expression:

$$CME = \sum_{i=1}^n (\hat{d}_i - d_i)^2 / n - 3, \text{ resulting a MSE}=6.25,$$

which is higher than that of the modified model (3.5337).

If the residuals of both models (Figure 2) are observed, it can be seen that in model (1) there is a lack of fit which tends to systematically overestimate the diameters at the tip and close to the base of the boles, while the structure of the residuals of the model (6) is much more desirable.

With respect to the compatible volume equation (10), it is also observed that there are gains in the R^2 , MSE and significance levels of the parameters, compared with the original volume equation (4) (Table 2). The residuals of both models present very similar tendencies and problems of heterocedasticity (Figure 3).

Fitting under MEM

The parameters estimated under RMV (Table 3) for taper (6) and V (10) show that when the contemporary correlation is considered, the standard error of the parameters of the model can be reduced considerably, as well as unifying the values per component. In these statistics it can be observed that the estimators of the parameters β_i of the equation of volume and taper obtained simultaneously with RMV present lower standard deviations than those obtained with OLS (Table 2 and 3), which makes these parameters more efficient.

Torres and Magaña (2001) mention that it is common for the majority of volume models to suffer problems of heterocedasticity, given that at higher values of diameters and height, the variation in the volumes of the trees becomes larger. This problem can be observed in the residuals of the equations of volume (4) and (10), fit by OLS (Figure 3), thus it is recommended to correct this deficiency. However, when the residuals of the simultaneously adjusted residuals of the proposed taper-volume system (Figure 4) are observed, it can be noted that there is no tendency of heterocedasticity in the two models, thus it is confirmed that the fit with mixed effects helps to reduce this problem (Fang and Bailey, 2001).

Estimation of specific effects with additional information of the inventory

To validate the pertinence of the proposed structure, data was used of ten trees of the Ejido La Victoria, which were cubed with the same methodology as those

Cuadro 4. Comparación de la eficiencia del modelo de volumen, con y sin efectos aleatorios en una muestra de 10 árboles.
Table 4. Comparison of the efficiency of the volume model, with and without random effects in a sample of 10 trees.

Altura comercial (pies)	Sesgo promedio con efectos mixtos y error en porcentaje		Sesgo promedio con efectos fijos y error en porcentaje		Diferencia porcentual promedio por altura
	M ³	%	m ³	%	
12	-0.4263	12.8	-0.5182	15.5	-2.7
20	-0.6041	11.4	-0.7411	14.0	-2.6
29	-0.5917	8.4	-0.7618	10.8	-2.4
Altura total	0.9969	8.6	0.7724	6.2	2.4

a las partes bajas del tronco. Considerando que las primeras trozas o trocería primaria tienen un valor comercial de hasta cinco veces más que la punta o producto secundario, y que las diferencias entre ambos volúmenes a esta altura es hasta 3%, se recomienda medir al menos esta información adicional en árboles de fuste recto y buena conformación para obtener mejores valores estimados para los productos de alto valor, sobre todo cuando se inventarían predios cuya posibilidad estimada es de varios miles de metros cúbicos. Esto se reflejaría en una estimación más adecuada de los dividendos económicos potenciales en ejidos / comunidades o conjuntos prediales que además del aprovechamiento procesan sus productos maderables. Cuando se estima el volumen total, el modelo con sólo efectos fijos es más preciso que el de efectos mixtos.

CONCLUSIONES

Las modificaciones realizadas al modelo de ahusamiento Cielito 1 permitieron mejorar el ajuste del ahusamiento y del volumen comercial teniéndose una estructura más flexible. El ajuste del sistema de cubicación compatible como un sistema con efectos mixtos no sólo es robusto, sino que permite usar información adicional para la cubicación en pie, que puede ser programada para lograr cálculos más precisos sobre todo para trocería de alto valor.

Además, con un ajuste MEM es estadísticamente más correcto el supuesto de eficiencia de los parámetros estimados al desplazar la heterocedasticidad en el volumen comercial sin complicar demasiado su estructura.

Para una valoración más precisa de las ganancias netas del uso de los modelos de efectos mixtos en la estimación del volumen comercial, se necesitarían pruebas de distribución de productos con datos de inventario, así como el costo adicional por tomar información de dos diámetros más de cada árbol que presuma características de alto valor comercial.

LITERATURA CITADA

Bailey, R. L. 1995. Upper-stem volumes from stem-analysis data: an overlapping bolt method. *Can. J. For. Res.* 25: 170-173.

used for the fit. In these trees four diameters were measured at heights that were easy to measure in the field (stump height, 0.6, 1.3 and 2.0 m); the normal diameters of these trees varied between 24 and 40 cm with total heights between 12 and 28 m. It was decided to compare the predictions at four merchantable heights measured in feet 12 (3.67 m), 20 (6.11 m), 30 (9.17 m) and total height with and without the use of the structure of random effects. The bias was used as a measurement of comparison of the efficiency of both

fits, defined as $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (V_{ij} - \hat{V}_{ij})$, where V_{ij} is the accumulated volume observed of the i -th tree at the j -th height and \hat{V}_{ij} is the estimated volume with and without random effects of the i -th tree at the j -th height.

When considering the specific variability of the tree, the predicted volumes are more precise than those obtained with the model of fixed effects up to the merchantable height of 30 feet (Table 4). From this point the fixed effects model is more adequate, given that the additional information provided corresponds to the lower parts of the bole. Considering that the first log or primary logs have a marketing value of up to five times higher than the tip or secondary product, and that the differences between the two volumes at this height is as much as 3%, it is recommended to measure at least this additional information in trees with a straight bole and good shape to obtain better estimated values for the products of high value, especially when inventories are made of lots whose estimated possibility is of several thousands of cubic meters. This would be reflected in a more adequate estimation of the potential economic dividends in ejidos / communities or groups who in addition to felling, process their timber products. When estimating the total volume, the model with only fixed effects is more precise than that of mixed effects.

CONCLUSIONS

The modifications made on the taper model Cielito 1 permit the improvement of the fit of taper and

- Borders, B. E. 1989. Systems of equations in forest stand modelling. *For. Sci.* 35(2): 548-556.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L.V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management a Quantitative Approach*. John Wiley & Sons Inc. USA. 333 p.
- Corral R., S., J. J. Nívar CH. y F. Fernández S. 1999. Ajuste de funciones de ahusamiento a los perfiles fustales de cinco Pináceas de la región de El Salto, Durango. *Madera y Bosques* 5(2): 53-65.
- Demaerschalk, J. P. 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Can. J. For. Res.* 3: 90-94.
- Fang, Z., and R.L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47(3): 287-300.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46(1): 1-12.
- Hall, D. B., and J. L. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Manzanilla B., H. 1981. Los sitios permanentes de investigación silvícola un sistema integrado para iniciarse en el cultivo de los ecosistemas forestales, Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos, Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias, Boletín Técnico Núm. 116. 68 p.
- Lynch, T. B., S. T. Chang, and J. P. Chandler. 1992. Estimation of individual tree volume by importance sampling and antithetic variates from the cylindrical shells integral. *Can. J. For. Res.* 22: 326-335.
- Pinheiro, C. J. and D. M. Bates. 2000. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. Springer-Verlag, New York, Inc. 527 p.
- Rentería A., J. B. 1995. Estimación del volumen comercial de *Pinus cooperi* Blanco mediante modelos de ahusamiento en Durango. II Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Resumen de Ponencias. Montecillo, México. 91 p.
- Schumacher, F. X. and F. S. Hall. 1933. Logarithmic expression of the timber volume. *J. Agric. Res.* 47(9): 719-734.
- marketing volume, with a more flexible structure. The fit of the compatible cubing system as a system with mixed effects is not only robust, but also makes possible the use of additional information for cubing in the stand, which can be programmed to achieve more precise calculations, especially for high value timber.
- Furthermore, with a MEM fit it is statistically more correct the assumption of efficiency of the estimated parameters by displacing the heterocedasticity in the merchantable volume without causing too many complications in its structure.
- For a more precise valuation of the net profits of the use of the models of mixed effects in the estimation of the merchantable volume, tests of product distribution would be needed with inventory data, as well as the additional cost of taking information of two additional diameters of each tree that is presumed to have characteristics of high commercial value.

End of the English version—



- Torres R., J. M., O. S. Magaña T. y G. A. Valles G. 1993. Funciones de ahusamiento para 8 especies forestales del Estado de México. I Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Resumen de Ponencias. Saltillo, Coahuila. 109 p.
- Torres R., J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de Plantaciones Forestales. Ed. LIMUSA, México. 472 p.
- Vonesh, E. F., and V. M. Chinchilli. 1997. *Linear and Nonlinear Models for the Analysis of Repeated Measurements*. Marcel Dekker, New York. 560 p.