

# EFFECTOS DE ROMPIMIENTOS BAJO LA HIPÓTESIS NULA DE LA PRUEBA DICKEY-FULLER PARA RAÍZ UNITARIA

## EFFECTS OF BREAKS UNDER THE NULL HYPOTHESIS WITH THE DICKEY-FULLER TEST FOR UNIT ROOT

Eddy Lizarazu-Alanez y José A. Villaseñor-Alva

Estadística. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México (jvillasr@colpos.mx) (eddylizarazu@yahoo.com)

### RESUMEN

La prueba Dickey-Fuller (DF) tiene baja potencia si se basa en un estimador de mínimos cuadrados para el parámetro de un proceso autorregresivo  $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t$ , con errores  $u_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ , donde  $H_0 : \rho = 1$  y  $H_1 : |\rho| < 1$ . Cuando la serie que corresponde a un proceso de raíz unitaria tiene un rompimiento, la prueba Dickey-Fuller conduce al rechazo espurio de la hipótesis nula. En este trabajo se estudia, a través de simulación de Monte Carlo, los efectos en la prueba DF para dos tipos de rompimientos bajo la hipótesis nula: (1) la coexistencia de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza del término de error; (2) dos rompimientos en el nivel de la serie. Los resultados de la simulación confirman la robustez de la prueba Dickey-Fuller de ajuste de medias recursivas (DFR) respecto a la prueba DF.

**Palabras clave:** Ajuste de medias recursivas, raíces unitarias, rompimientos estructurales, procesos autorregresivos.

### INTRODUCCIÓN

En el análisis de series de tiempo es habitual recurrir a la prueba Dickey-Fuller (DF) con el propósito de probar si los datos responden a un proceso autorregresivo de raíz unitaria. La prueba DF para un proceso raíz unitaria, sin embargo, depende de supuestos sobre el proceso estocástico bajo la hipótesis nula. De acuerdo con Schewert (1989), la prueba DF tiene baja potencia si se basa en un estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para el parámetro  $\rho$  de un proceso autorregresivo  $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t$ , con errores  $u_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ , donde la hipótesis nula es  $\rho = 1$  y la hipótesis alternativa es  $|\rho| < 1$ . El problema de potencia y tamaño de prueba de la hipótesis de raíz unitaria ha sido estudiado en diferentes contextos. Por ejemplo, Perron (1989) documenta el fenómeno que surge cuando la serie que corresponde a un proceso

### ABSTRACT

The Dickey-Fuller (DF) test has low power if it is based on the least squares estimator for the parameter of an autoregressive process  $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t$ , with error  $u_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ , where  $H_0 : \rho = 1$  and  $H_1 : |\rho| < 1$ . When the series that corresponds to a unit root process has a break, the Dickey-Fuller test leads to a spurious rejection of the null hypothesis. This article studies, through Monte Carlo simulation, the effects in the DF test for two types of breaks under the null hypothesis: (1) the coexistence of breaks in the level of the series and in the variance of the error term; (2) two breaks in the level of the series. The simulation results confirm the property of robustness of the recursive mean adjustment Dickey-Fuller (DFR) test regarding the DF test.

**Key words:** Recursive mean adjustment; structural break; unit root, autoregressive processes.

### INTRODUCTION

In the analysis of times series it is common to resort to the Dickey-Fuller (DF) test to prove whether the data respond to a unitary root autoregressive process. The DF test for a unit root process, however, depends on assumptions on the stochastic process under the null hypothesis. According to Schewert (1989), the DF test has low power if it is based on an estimator of ordinary minimum squares (MCO) for the  $\rho$  parameter of an autoregressive process  $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + u_t$ , with errors  $u_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ , where the null hypothesis is  $\rho = 1$  and the alternative hypothesis is  $|\rho| < 1$ . The problem of test power and size of the unit root null hypothesis has been studied in different contexts. For example, Perron (1989) documents the phenomenon that occurs when the series corresponding to a stationary process around a trend has a break. Although this phenomenon is important, there is another collateral phenomenon, which, according to Leybourne *et al.* (1998) and Leybourne and Newbold (2000) is called the Perron inverse phenomenon. The idea can be expressed in the following manner: when the series

Recibido: Diciembre, 2005. Aprobado: Agosto, 2006.

Publicado como ENSAYO en *Agrociencia* 41: 193-203. 2007.

estacionario alrededor de una tendencia tiene un rompimiento. Si bien este fenómeno es importante, hay otro colateral, el cual, de acuerdo con Leybourne *et al.* (1998) y Leybourne y Newbold (2000) se denomina el fenómeno inverso de Perron. La idea puede expresarse de la siguiente manera: cuando la serie que corresponde a un proceso de raíz unitaria experimenta un rompimiento, la prueba DF conduce al rechazo espurio de la hipótesis nula.

El problema de distorsión de la prueba de raíz unitaria ha sido corregido mediante la prueba Dickey-Fuller de ajuste de medias recursivas (DFR). Los estudios de robustez de la prueba DFR se han realizado en los casos más sencillos de rompimientos, por lo que es importante tratar casos más complicados de rompimientos de los reportados por Cook (2002, 2003). En este artículo se estudia, mediante simulación de Monte Carlo, los efectos en la prueba DF de dos tipos particulares de rompimientos bajo la hipótesis nula: (1) la coexistencia de rompimientos en el nivel de la serie y la varianza del término de error; y (2) dos rompimientos en el nivel de la serie.

### FORMULACIÓN DE LA PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA

De acuerdo con Bhargava (1986), la prueba de raíz unitaria puede formularse en términos de las ecuaciones:

$$Y_t = \mu + u_t \tag{1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

donde  $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ .

Al introducir una ecuación en otra y rezagando un período:

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3}$$

La hipótesis de raíz unitaria es  $H_0 : \rho = 1$  vs  $H_1 : |\rho| < 1$ . Bajo la hipótesis alternativa  $H_1$ ,  $Y_t$  es un proceso estacionario alrededor de  $\mu/(1-\rho)$ , mientras que bajo la hipótesis nula  $H_0$ ,  $Y_t$  es un proceso estacionario en su primera diferencia  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ .

El enfoque alternativo corresponde a Dickey y Fuller (1979), el cual está basado en una autorregresión:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

El problema con este enfoque consiste en la interpretación de los coeficientes. Por ejemplo, bajo la

that corresponds to a unit root process experiences a break, the DF test leads to the spurious rejection of the null hypothesis.

The problem of distortion of the unit root test has been corrected via the Dickey-Fuller test of recursive mean adjustment (DFR). Studies of robustness of the DFR test have been conducted in the simplest cases of breaks; therefore, it is important to take up more complicated cases of breaks than those reported by Cook (2002, 2003). In this article, using Monte Carlo simulation, the effects of the DF test of two particular types of breaks are studied under the null hypothesis: (1) the coexistence of breaks at the series level and variance in the error term and (2) two breaks at the series level.

### FORMULATION OF THE UNIT ROOT TEST

According to Bhargava (1986), the unit root test can be formulated in terms of the equations:

$$Y_t = \mu + u_t \tag{1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2}$$

where  $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ .

where, introducing an equation into another and delaying a period:

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3}$$

The unit root hypothesis is  $H_0 : \rho = 1$  and  $H_1 : |\rho| < 1$ , while under the null hypothesis  $H_1$ ,  $Y_t$  is a stationary process  $\mu/(1-\rho)$  in its first difference  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ .

The alternative approach corresponds to Dickey and Fuller (1979), which is based on autoregression:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

The problem with this approach is the interpretation of the coefficients. For example, under the null hypothesis,  $\alpha$  represents the trend of the  $Y_t$  process, while under the alternative hypothesis, the  $Y_t$  process is stationary around  $\alpha/(1-\rho)$  and, therefore, the Bhargava approach is preferable.

The unit root test is assisted by the  $\rho$  estimator in (3). However, this estimation is not feasible, while  $\mu$  is a nuisance parameter. In practice, we proceed with an estimator of the  $\mu$  parameter, which must be constructed previously to the estimation of  $\rho$ . Note that  $\mu$  can be interpreted as the mean of (1), and thus it is natural that under MCO, the  $\mu$  estimator is the mean of  $Y_t$ . In this

hipótesis nula,  $\alpha$  representa a la tendencia del proceso  $Y_t$ , mientras que bajo la hipótesis alternativa, el proceso  $Y_t$  es estacionario alrededor de  $\alpha/(1-\rho)$ , por lo cual es preferible el enfoque Bhargava.

La prueba de raíz unitaria se auxilia con el estimador de  $\rho$  en (3). Sin embargo, dicha estimación no es viable, en tanto  $\mu$  resulta un parámetro de estorbo. En la práctica se procede con un estimador del parámetro  $\mu$ , el cual debe construirse previamente a la estimación de  $\rho$ . Nótese que se puede interpretar a  $\mu$  como la media de (1), por lo cual es natural que bajo MCO el estimador de  $\mu$  sea la media de  $Y_t$ . De esta manera, se procede con las observaciones en desviación de la media estimada  $\hat{\mu}$ :

$$Y_t - \hat{\mu} = \rho(Y_{t-1} - \hat{\mu}) + e_t \quad (5)$$

Entonces, el estimador MCO del parámetro autorregresivo es  $\hat{\rho}$ , donde  $\hat{\mu} \equiv \bar{Y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=2}^T (Y_{t-1} - \bar{Y})^2} \quad (6)$$

con base en una realización  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$

La distribución de probabilidad de  $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho)$  bajo  $H_0$ , sin embargo, se colapsa en un punto, por lo que en este caso, de acuerdo con Phillips (1987), se utiliza la distribución de probabilidad del estadístico  $T(\hat{\rho} - 1)$  Dickey-Fuller (DF), donde  $W(\cdot)$  es un proceso Browniano simple:

$$T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{D} DF \equiv \frac{\frac{1}{2} [W(1)^2 - 1] - W(1) \int_0^1 W(r) dr}{\int_0^1 W(r)^2 dr - \left[ \int_0^1 W(r) dr \right]^2} \quad (7)$$

Con todo, hay un problema con  $T(\hat{\rho} - 1)$  debido a que  $\hat{\rho}$  induce un problema de colinealidad entre el regresor  $Y_{t-1}$  y el término de error  $e_t$ .

La existencia de este problema provoca que el estadístico DF tenga una baja potencia. Sin embargo, de acuerdo con Shin y So (2001), la potencia de la prueba DF puede incrementarse si se utiliza otro estimador de  $\mu$  que no tenga colinealidad con el término de error. El esquema propuesto para remediar esta dificultad es el estimador de ajuste de medias recursivas de  $\mu$ , a saber

way, we proceed with the observations in deviations from the estimated mean  $\hat{\mu}$ :

$$Y_t - \hat{\mu} = \rho(Y_{t-1} - \hat{\mu}) + e_t \quad (5)$$

In these circumstances, the MCO estimator of the autoregressive parameter is  $\hat{\rho}$ , where  $\hat{\mu} \equiv \bar{Y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T Y_t$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=2}^T (Y_{t-1} - \bar{Y})^2} \quad (6)$$

based on a  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  realization.

The probability distribution of  $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho)$  under  $H_0$ , however, collapses at one point; therefore, in this case, according to Phillips (1987), the probability distribution of the statistic  $T(\hat{\rho} - 1)$  Dickey-Fuller (DF) is used in which  $W(\cdot)$  is a simple Brownian process:

$$T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{D} DF \equiv \frac{\frac{1}{2} [W(1)^2 - 1] - W(1) \int_0^1 W(r) dr}{\int_0^1 W(r)^2 dr - \left[ \int_0^1 W(r) dr \right]^2} \quad (7)$$

Even so, there is a problem with  $T(\hat{\rho} - 1)$  because  $\hat{\rho}$  induces a problem of co-linearity between the regressor  $Y_{t-1}$  and the term of error  $e_t$ .

The existence of this problem causes the DF statistic to have low power. However, according to Shin and So (2001), DF test power can increase if another estimator of  $\mu$  that does not have co-linearity with the error term is used. The proposed scheme for remedying this difficulty is the estimator of recursive mean adjustment of  $\mu$ , or  $\hat{\mu}_t$ , which is calculated sequentially. For example, for  $t-1$ , we have  $\hat{\mu}_{t-1} \equiv \bar{Y}_{t-1} = (t-1)^{-1} \sum_{i=2}^{t-1} Y_i$ . In this way, the estimator of the  $\rho$  parameter is:

$$\hat{\rho}_r = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}_{t-1})(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sum_{t=2}^T (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2} \quad (8)$$

$\hat{\mu}_t$ , el cual se calcula secuencialmente. Por ejemplo, para  $t-1$  se tiene  $\hat{\mu}_{t-1} \equiv \bar{Y}_{t-1} = (t-1)^{-1} \sum_{i=2}^{t-1} Y_i$ . De esta manera, el estimador del parámetro  $\rho$  es:

$$\hat{\rho}_r = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y}_{t-1})(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sum_{t=2}^T (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2} \quad (8)$$

Nótese que se puede seguir suponiendo la existencia de un proceso estocástico paseo aleatorio simple sin intercepto en las variables transformadas  $\hat{Y}_t = \hat{Y}_{t-1} + e_t$ , donde  $\hat{Y}_t = Y_t - \bar{Y}_{t-1}$  y  $\hat{Y}_{t-1} = Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-2}$ .

El estadístico de prueba Dickey-Fuller de ajuste de medias recursivas (DFR), siguiendo a Shin y So (2001, 2002) es tal que:

$$T(\hat{\rho}_r - 1) \xrightarrow{D} DF_r \equiv \frac{\frac{1}{2} \left[ W(1)^2 - 1 \right] - \int_0^1 \int_0^r r^{-1} W(s) ds dW(r)}{\int_0^1 \left[ W(r) - r^{-1} \int_0^r W(s) ds \right]^2 dr} \quad (9)$$

Dadas las estadísticas de prueba  $T(\hat{\rho} - 1)$  y  $T(\hat{\rho}_r - 1)$ , las pruebas de raíz unitaria rechazan respectivamente  $H_0$  si  $T(\hat{\rho} - 1) < C_\alpha$  y si  $T(\hat{\rho}_r - 1) < \bar{C}_\alpha$ , donde  $C_\alpha$  y  $\bar{C}_\alpha$  son los percentiles  $\alpha$  de la distribución involucrada bajo la hipótesis nula. Los valores críticos de estas distribuciones se encuentran respectivamente en Hamilton (1994) y Shin y So (2001).

### DISEÑO DE SIMULACIÓN PARA ESTUDIAR LA ROBUSTEZ

Siguiendo a Leybourne *et al.* (1998), la simulación se hizo (por conveniencia) para muestras de tamaño  $T=100$  bajo el siguiente mecanismo generador de datos:

$$Y_t = \theta S_t(\lambda) + v_t, \theta > 0 \quad (10)$$

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (11)$$

$$S_t(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda T \\ 1 & \text{si } t > \lambda T \end{cases}, \lambda \in (0,1), \lambda T \in \{1,2,\dots,99\} \quad (12)$$

Note that we can continue to assume the existence of a simple random walk stochastic process with no intercept in the transformed variables  $\hat{Y}_t = \hat{Y}_{t-1} + e_t$ , where  $\hat{Y}_t = Y_t - \bar{Y}_{t-1}$  and  $\hat{Y}_{t-1} = Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-2}$ .

The Dickey-Fuller test recursive mean (DFR) statistic, following Shin and So (2001, 2002) is such that:

$$T(\hat{\rho}_r - 1) \xrightarrow{D} DF_r \equiv \frac{\frac{1}{2} \left[ W(1)^2 - 1 \right] - \int_0^1 \int_0^r r^{-1} W(s) ds dW(r)}{\int_0^1 \left[ W(r) - r^{-1} \int_0^r W(s) ds \right]^2 dr} \quad (9)$$

Given the test statistics  $T(\hat{\rho} - 1)$  and  $T(\hat{\rho}_r - 1)$  the unit root tests reject  $H_0$ , respectively, if  $T(\hat{\rho} - 1) < C_\alpha$  and if  $T(\hat{\rho}_r - 1) < \bar{C}_\alpha$ , where  $C_\alpha$  and  $\bar{C}_\alpha$  are the  $\alpha$  percentiles of the distribution involved under the null hypothesis. The critical values of these distributions are found, respectively in Hamilton (1994) and Sin and So (2001).

### SIMULATION DESIGN TO STUDY ROBUSTNESS

Following Leybourne *et al.* (1998), the simulation was executed for sample sizes  $T=100$  (for the sake of convenience) under the following data-generating mechanism:

$$Y_t = \theta S_t(\lambda) + v_t, \theta > 0 \quad (10)$$

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (11)$$

$$S_t(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda T \\ 1 & \text{si } t > \lambda T \end{cases}, \lambda \in (0,1), \lambda T \in \{1,2,\dots,99\} \quad (12)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \eta_t \sim iidN(0,1) \quad (13)$$

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si } t \leq \lambda T \\ \sigma_2 & \text{si } t > \lambda T \end{cases}, \lambda \in (0,1), \lambda T \in \{1,2,\dots,99\} \quad (14)$$

$$\delta = \sigma_2/\sigma_1, \delta \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\} \quad (15)$$

The value  $\theta$  denotes the size of the structural change that is present, while  $\lambda T$  represents the break point after which an abrupt change in innovation variance  $\varepsilon_t$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \sim iidN(0,1) \quad (13)$$

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si } t \leq \lambda T \\ \sigma_2 & \text{si } t > \lambda T, \lambda \in (0,1), \lambda T \in \{1,2,\dots,99\} \end{cases} \quad (14)$$

$$\delta = \sigma_2/\sigma_1, \quad \delta \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\} \quad (15)$$

El valor de  $\theta$  denota el tamaño del cambio estructural que está presente, mientras que  $\lambda T$  representa el punto de rompimiento después del cual ocurre un cambio abrupto en la varianza de la innovación  $\varepsilon_t$ . La magnitud del rompimiento en la varianza de la innovación se cuantifica por  $\delta = \sigma_2/\sigma_1$ . De esta manera, si  $\delta = 1$  no hay ningún tipo de rompimiento. En cambio, si por ejemplo  $\delta$  toma valores tales como  $\delta \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$  entonces  $\sigma_2 > \sigma_1$ , por lo que varianza del error experimenta una disminución respecto de su nivel inicial.

En relación a la presencia de dos rompimientos sobre el nivel de la serie, el diseño de experimento involucrado es:

$$Y_t = \theta_1 S_t(\lambda_1) + \theta_2 W_t(\lambda_2) + v_t, \quad \theta_1, \theta_2 > 0 \quad (16)$$

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iidN(0,1) \quad (17)$$

$$S_t(\lambda_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda_1 T \\ 1 & \text{si } t > \lambda_1 T, \lambda_1 \in (0,1) \end{cases} \quad (18)$$

$$W_t(\lambda_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda_2 T \\ 1 & \text{si } t > \lambda_2 T, \lambda_2 \in (0,1) \end{cases} \quad (19)$$

Los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  representan las magnitudes de rompimiento sobre el nivel de la serie, donde éstos se interpretan como un múltiplo de la desviación estándar de la innovación  $\varepsilon_t$ . A su vez, se supone que  $\varepsilon$  es un proceso de ruido blanco, siendo variables independientes e idénticamente distribuidas. Además, sin pérdida de generalidad, se supone que las innovaciones tienen varianza unitaria. De esta manera, la formulación anterior implica que las primeras diferencias en  $Y$  son un proceso de ruido blanco, el cual experimenta la presencia de dos valores aberrantes aislados de magnitud  $\theta_1$  y  $\theta_2$  asociado a los instantes  $\lambda_1 T$  y  $\lambda_2 T$ , donde por conveniencia  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$ .

occurs. The magnitude of the break in the innovation variance is quantified by  $\delta = \sigma_2/\sigma_1$ . In this way, if  $\delta = 1$  is observed, there is no break of any kind. In contrast, if, for example,  $\delta$  takes on values such as  $\delta \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , then  $\alpha_2 > \alpha_1$ , then error variance descends below its initial value.

Regarding the presence of two breaks on the series level, the experimental design involved is:

$$Y_t = \theta_1 S_t(\lambda_1) + \theta_2 W_t(\lambda_2) + v_t, \quad \theta_1, \theta_2 > 0 \quad (16)$$

$$v_t = v_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iidN(0,1) \quad (17)$$

$$S_t(\lambda_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda_1 T \\ 1 & \text{si } t > \lambda_1 T, \lambda_1 \in (0,1) \end{cases} \quad (18)$$

$$W_t(\lambda_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \lambda_2 T \\ 1 & \text{si } t > \lambda_2 T, \lambda_2 \in (0,1) \end{cases} \quad (19)$$

Parameters  $\theta_1$  and  $\theta_2$  represent magnitudes of breaks on the series level, where these are interpreted as a multiple of the standard deviation from the innovation  $\varepsilon_t$ . In turn, it is assumed that  $\varepsilon$  is a white noise process, being independent and identically distributed variables. Also, with no loss of generality, it is assumed that the innovations have unit variance. In this way, the above formation implies that the first differences in  $Y$  are a white noise process, which experiences the presence of two isolated aberrant values of  $\theta_1$  and  $\theta_2$  magnitude associated with moments  $\lambda_1 T$  and  $\lambda_2 T$ , where, for the sake of convenience  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$ .

#### BREAKS AT THE SERIES LEVEL AND VARIANCE OF ERROR

Calculations of the empirical frequency to reject the null hypothesis follows the guidelines of Leybourne *et al.* (1998), so that in S-PLUS software, with 5000 repetitions, the first 100 observations are ruled out in order to remove the effect of the initial condition  $Y_0 = 0$ . The rates of rejection of  $H_0$  are calculated according to the statistics  $\kappa_o = T(\hat{\rho} - 1)$  and  $\kappa_r = T(\hat{\rho}_r - 1)$  for 5% test sizes, using the critical values of the involved distributions.

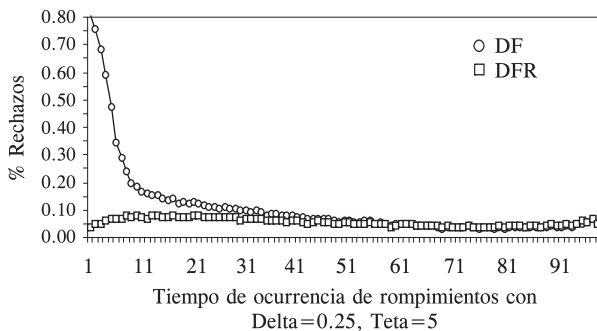
Results of the Monte Carlo simulation of this section are reported in three groups, depending on the magnitudes of the breaks on both the series level and error variance. These groups correspond, one to one, to Figures 1 and 2, Figures 3 and 4, and Figures

**ROMPIMIENTOS EN EL NIVEL DE LA SERIE  
Y LA VARIANZA DEL ERROR**

El cálculo de la frecuencia empírica para rechazar la hipótesis nula sigue las pautas de Leybourne *et al.* (1998), por lo que en el paquete S-PLUS con 5000 repeticiones se descartan las primeras 100 observaciones con el propósito de remover el efecto de la condición inicial  $Y_0=0$ . Las tasas de rechazo de  $H_0$  se calculan según los estadísticos  $\kappa_o = T(\hat{\rho} - 1)$  y  $\kappa_r = T(\hat{\rho}_r - 1)$  para tamaños de pruebas de 5%, utilizando los valores críticos de las distribuciones involucradas.

Los resultados de simulación de Monte Carlo de esta sección se reportan en tres grupos, dependiendo de las magnitudes de rompimiento tanto del nivel de la serie como de la varianza del error. Estos grupos se corresponden uno a uno con las Figuras 1 y 2, Figuras 3 y 4 y Figuras 5 y 6 según el caso  $\delta=\{0.25, 0.5, 0.75\}$  y  $\theta=\{5, 10\}$ .

En las Figuras 1 y 2 la varianza tiene una reducción de 75% respecto de su valor inicial ( $\delta=0.25$ ), pero en la Figura 1 el nivel de la serie tiene una magnitud de rompimiento de  $\theta=5$ , mientras que en la Figura 2  $\theta=10$ . En las Figuras 1 y 2 la combinación de estos dos tipos de rompimientos ocasiona una distorsión severa en la tasa de rechazo de la prueba DF, alcanzando en el primer punto de quiebre una tasa máxima de rechazo de 80.78% y 99.44%, respectivamente. Si bien la frecuencia de rechazo de  $H_0$  de la prueba DF empieza a decrecer paulatinamente hasta alcanzar su valor nominal a medida que el tiempo muestral avanza, hay una diferencia sustancial sobre el momento en que se logra alcanzar el valor de 5%. Por ejemplo, si  $\delta=0.25$  y  $\theta=5$ , la tasa de rechazo es 5% para valores de  $\lambda T \geq 58$ , mientras que si  $\delta=0.25$  y  $\theta=10$ , la frecuencia de rechazo es 5% para  $\lambda T \geq 11$ .



**Figura 1. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.**

**Figure 1. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.**

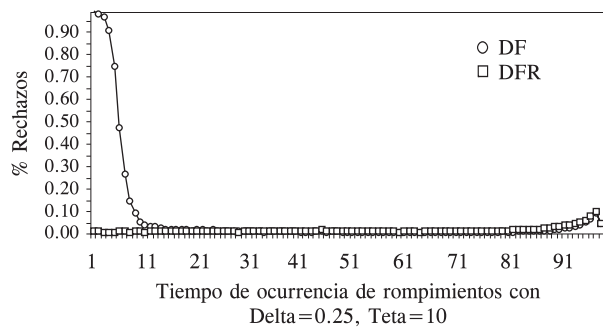
5 and 6, depending on the case,  $\delta=\{0.25, 0.5, 0.75\}$  and  $\theta=\{5, 10\}$ .

In Figure 1 and 2 the variance has a 75% reduction of its initial value ( $\delta=0.25$ ), but in Figure 1, the series level has a break magnitude of  $\theta=5$ , while in Figure 2  $\theta=10$ . In Figures 1 and 2 the combination of these two types of breaks causes a severe distortion in the DF test rate of rejection, reaching maximum rejection rates of 80.78% and 99.44%, respectively, at the first break point. While the DF test rejection frequency of  $H_0$  begins to decrease gradually until it reaches its nominal value as the sample time advances, there is a substantial difference at the moment in which the value reaches 5%. For example, if  $\delta=0.25$  and  $\theta=5$ , the rate of rejection is 5% for  $\lambda T \geq 58$  values, while if  $\delta=0.25$  and  $\theta=10$ , the rejection frequency is 5% for  $\lambda T \geq 11$ .

Regarding the DFR test, for the case of  $\delta=0.25$  and  $\theta=5$  (Figure 1), slight problems of distortion are observed, especially for those breaking points such as  $4 \leq \lambda T \leq 50$ . In contrast, when  $\delta=0.25$  and  $\theta=10$  (Figure 2), the DFR test recognizes that the data are generated by a unit root process. Nevertheless, there are still a few problems of distortion for points such as  $95 \leq \lambda T \leq 98$  when the  $H_0$  rejection frequency slightly surpasses 5%; otherwise, the test is robust to breaks under the null hypothesis.

Regarding the second group of results (Figures 3 and 4), the degree of distortion of the standard DF test persists when reduction of the variance is 50% of its initial value, regardless of the combinations of break magnitudes  $\theta=5$  and  $\theta=10$ .

Although in Figure 3 there is a relative decrease in the degree of distortion of the DF test, reaching a maximum rate of rejection of 37.40%, compared with 80.20% for the case of  $\delta=0.5$  and  $\theta=5$  in Figure 4, distortion in DF test size persists. Of course, in Figure 3 the degree of distortion is corrected for the period so that  $47 \leq \lambda T \leq 96$ .



**Figura 2. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.**

**Figure 2. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.**

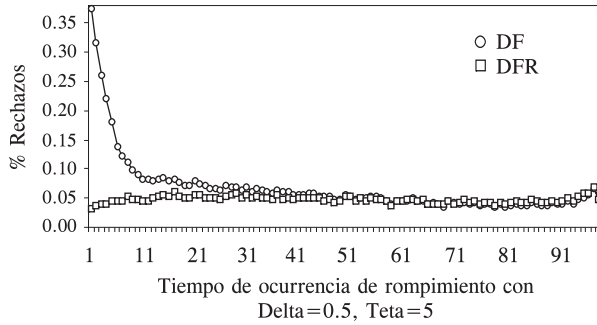


Figura 3. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 3. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

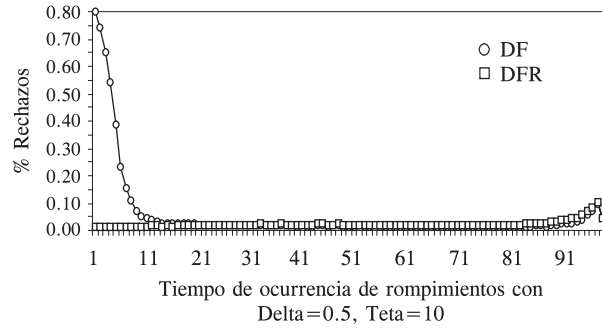


Figura 4. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 4. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

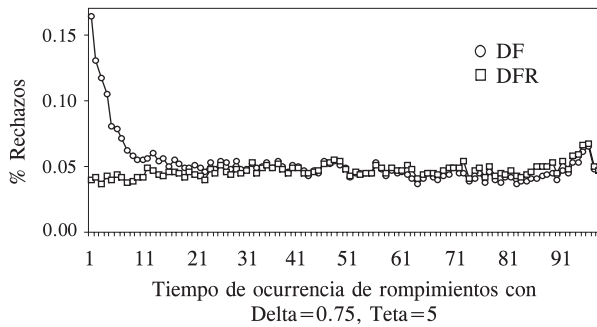


Figura 5. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 5. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

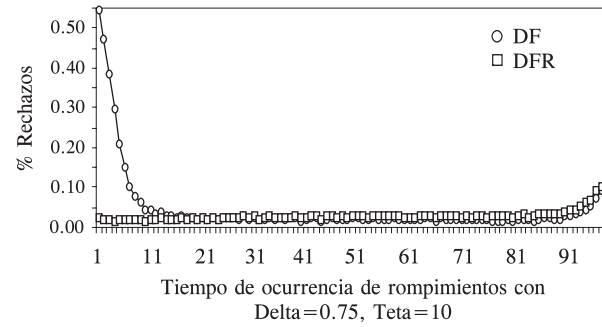


Figura 6. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 6. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

En relación con la prueba DFR, para el caso  $\delta=0.25$  y  $\theta=5$  (Figura 1) se observan leves problemas de distorsión sobre todo para aquellos puntos de quiebre tales que  $4 \leq \lambda T \leq 50$ . En cambio, cuando  $\delta=0.25$  y  $\theta=10$  (Figura 2), la prueba DFR reconoce que los datos son generados por un proceso raíz unitaria. No obstante, se presentan algunos problemas de distorsión para los puntos tales que  $95 \leq \lambda T \leq 98$  cuando la frecuencia de rechazo de  $H_0$  supera ligeramente 5%; por lo demás, la prueba es robusta a los rompimientos bajo la hipótesis nula.

En cuanto al segundo grupo de resultados (Figuras 3 y 4) el grado de distorsión de la prueba DF estándar persiste cuando la reducción de la varianza es 50% de su valor inicial, independientemente de las combinaciones de magnitudes de rompimiento  $\theta=5$  y  $\theta=10$ .

Si bien en la Figura 3 hay una disminución relativa en el grado de distorsión de la prueba DF, alcanzando una tasa máxima de rechazo de 37.40%, comparado con 80.20% para el caso  $\delta=0.5$  y  $\theta=5$  de la Figura 4, persiste la distorsión en el tamaño de la prueba DF. Por supuesto, en la Figura 3 el grado de distorsión se corrige

Figures 3 and 4 show that the DFR test is robust in presence of these two types of simultaneous breaks. The  $H_0$  rejection rate is less than or equal to 5%, except in isolated cases, which correspond to the final part of the sampling period, when  $\theta=5$  as well as when  $\theta=10$ . Particularly when break points are such that  $96 \leq \lambda T \leq 98$  in Figures 3 and 5, the  $H_0$  rejection frequency reaches a rate slightly higher than the nominal one.

The third group of simulation results is reported in Figures 5 and 6, in which there is a reduction of 25% in the variance ( $\delta=0.75$ ), together with break magnitudes of  $\theta=5$  and  $\theta=10$ . The results again give evidence of a severe problem of distortion in the DF test for the initial phase of the sample. In both cases, the degree of distortion of the DF test reaches maximum empirical rejection rates of the null hypothesis of 16.34% and 54.28%, respectively. These rejection rates, however, decrease to a rejection frequency of 5% for the sampling period  $\lambda T=10$  and  $\lambda T=9$ , respectively. The exception is produced in the final sampling phase when rejection

para el período tal que  $47 \leq \lambda T \leq 97$ , mientras que en el caso de la Figura 4, esta corrección se observa para los puntos de quiebre tales que  $11 \leq \lambda T \leq 96$ .

En las Figuras 3 y 4 se muestra que la prueba DFR es robusta en presencia de estos dos tipos de rompimiento simultáneos. La tasa de rechazo de  $H_0$  para la prueba DFR es menor o igual a 5%, excepto en casos aislados, los cuales corresponden a la parte final del período muestral, tanto si  $\theta=5$  como si  $\theta=10$ . En particular, cuando los puntos de quiebre son tales que  $96 \leq \lambda T \leq 98$  en las Figuras 3 y 4, la frecuencia de rechazo de  $H_0$  alcanza una tasa ligeramente superior a su valor nominal.

El tercer grupo de resultados de simulación se reporta en las Figuras 5 y 6, correspondiente al de una disminución de la varianza de 25% ( $\delta=0.75$ ), junto con las magnitudes de rompimiento  $\theta=5$  y  $\theta=10$ . Los resultados dan evidencia nuevamente de un problema de distorsión severo en la prueba DF para la fase inicial de la muestra. En ambos casos, el grado de distorsión de la prueba DF alcanza tasas empíricas de rechazo máximas de la hipótesis nula de 16.34% y 54.28%, respectivamente. Estas tasas de rechazo, sin embargo, decrecen hasta alcanzar una frecuencia de rechazo de 5% para el período muestral  $\lambda T=10$  y  $\lambda T=9$ , respectivamente. La excepción se produce en la fase final de la muestra, cuando las tasas de rechazo se incrementan alcanzando 6% y 9% respectivamente en ambas Figuras.

Por otro lado, las Figuras 5 y 6 muestran evidencia de que la prueba DFR es robusta en presencia de estos dos tipos de rompimientos bajo la hipótesis nula. En ambos casos, la tasa de rechazo empírica de la prueba raíz unitaria se sitúa alrededor de 5%, excepto en algunos casos excepcionales originados en la parte final de la muestra.

En la mayoría de los casos estudiados tanto la prueba DF como la DFR incrementan el porcentaje de rechazo de  $H_0$  en la fase final de la muestra.

## DOS ROMPIMIENTOS SIMULTÁNEOS EN EL NIVEL DE LA SERIE

La simulación Monte Carlo para el caso de dos rompimientos en el nivel de la serie para muestras  $T=100$  se realizó en condiciones idénticas, con la única diferencia de que ahora hay 2000 repeticiones y magnitudes de rompimiento idénticas  $\theta_1=\theta_2=5$ . Los resultados se muestran en las Figuras 7 y 8, donde al pie de cada figura se anota el valor de los parámetros involucrados. Por ejemplo, dado que hay dos puntos de quiebre, se tiene  $\lambda_1 T = Tb_1$  y  $\lambda_2 T = Tb_2$ , donde es propio considerar la condición  $Tb_2 > Tb_1$ , señalado con el índice  $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$ .

rates increase, reaching 6% and 9%, respectively in both figures.

In addition, Figures 5 and 6 show evidence that the DFR test is robust in the presence of these two types of breaks under the null hypothesis. In both cases, the empirical rejection rate of the unit root test is around 5%, except in a few exceptional cases originating at the final part of the sample.

In most of the studied cases, both the DF and the DFR tests increase the percentage of rejection of  $H_0$  in the final phase of the sample.

## TWO SIMULTANEOUS BREAKS AT THE SERIES LEVEL

Monte Carlo simulation for the case of two breaks at the series level for  $T=100$  samples was conducted under identical conditions, with the only difference that now there are 2000 repetitions and identical break magnitudes  $\theta_1=\theta_2=5$ . The results are shown in Figures 7 and 8; values of the involved parameters are shown below each figure. For example, given that there are two breaking points, we have  $\lambda_1 T = Tb_1$  and  $\lambda_2 T = Tb_2$ , where it is appropriate to consider the condition  $Tb_2 > Tb_1$ , set with the index  $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$ .

The results show a pattern similar to those reported by Cook (2002). That is, if the two breaks occur in the initial phase of the sample, then the DF test experiences a severe distortion in the null hypothesis rejection rate. In contrast, the DFR test is robust in all of the cases examined. For example, in Figures 7 and 8 empirical frequencies of 22.9% and 17.5% are observed for the DF test at the break points located at  $(Tb_1=2, Tb_2=3)$  and  $(Tb_1=3, Tb_2=4)$ . However, these rejection frequencies for the DF test decrease when the two breaks at the series level are produced in the final part of the sample.

In a similar way, in Figures 9 and 10 it is observed that the rejection rates of the DF test are produced for the first break points, reaching levels of 12.7% and 7.15%, respectively, to later decrease gradually, but not converging to its nominal value of 5%. In this way, the distortion in its test size never reaches its nominal value.

In all of the figures, without exception, the rejection rate of the DFR test is 5% or lower, and therefore it is quite robust.

## DISCUSSION OF RESULTS

The results presented in the previous section show some interesting aspects of the DF test size under breaks in the null hypothesis. Clearly, the problem of spurious rejection of the unit root hypothesis of the



Los resultados muestran un patrón similar a los reportados por Cook (2002). Es decir, si los dos rompimientos ocurren en la fase inicial de la muestra, entonces la prueba DF experimenta una distorsión severa en la tasa de rechazo de la hipótesis nula. Por el contrario, la prueba DFR resulta robusta en todos los casos examinados. Por ejemplo, en la Figuras 7 y 8 se observan frecuencias empíricas de 22.9% y 17.5% para la prueba DF en los puntos de quiebre situados en  $(Tb_1=2, Tb_2=3)$  y  $(Tb_1=3, Tb_2=4)$ . Sin embargo, estas frecuencias de rechazo para la prueba DF disminuyen conforme los dos rompimientos en el nivel de la serie se producen en la parte final de la muestra.

Similarmente, en las Figuras 9 y 10 se observa que las tasas de rechazo de la prueba DF se producen para los primeros puntos de quiebre, alcanzando niveles de 12.7% y 7.15%, respectivamente, para luego disminuir paulatinamente, pero sin converger a su valor nominal de 5%. De esta manera, la distorsión que experimenta en su tamaño de prueba nunca alcanza su valor nominal.

DF test results from some type of break in the null hypothesis. We have found the same pattern reported in the literature of severe distortion of rejection of the null hypothesis, especially when the break occurs in the initial phase of the sample. However, in this context, there are two particular limits, depending on the breaks analyzed.

- 1) Supremacy of the effects resulting from the reduction in variance of error over changes at the series level is observed for the DF test. That is, in the measure that the error variance does not fall abruptly from its initial level and that the break point is closer to the end phase of the sample, the rate of spurious rejection of the DF test is corrected.
- 2) When there is a double break in the series level, the DF test exhibits a recurrent divergence from its nominal value.

The latter result contrasts with those reported by Cook (2002, 2003) in the sense that it does not

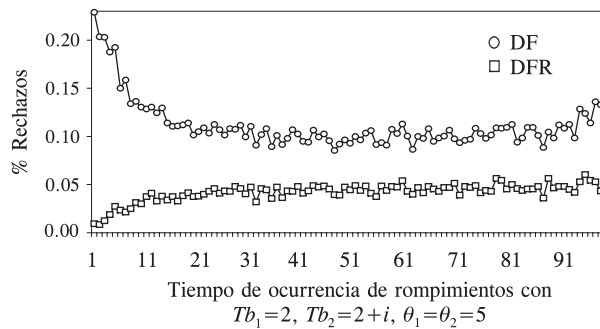


Figura 7. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 7. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

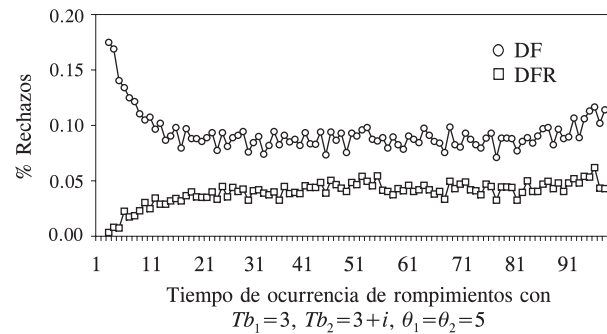


Figura 8. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 8. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

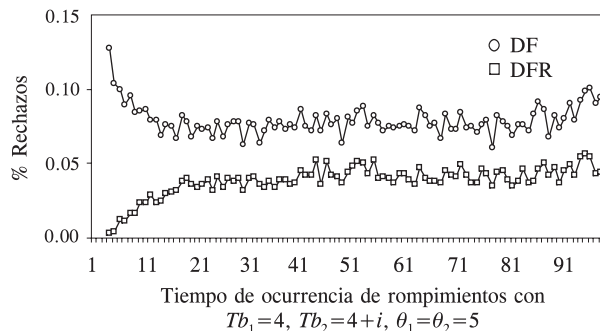


Figura 9. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 9. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

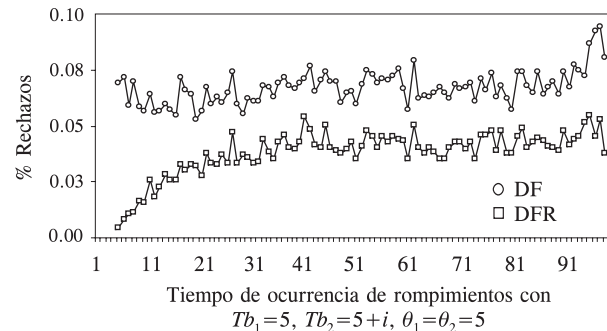


Figura 10. Porcentaje de rechazos bajo  $H_0$  para puntos de rompimientos en el nivel de la serie y en la varianza de la innovación.

Figure 10. Percentage of rejections under  $H_0$  for break points at the series level and in the innovation variance.

En todas las figuras, sin excepción, la tasa de rechazo de la prueba DFR es 5% o inferior, por lo que resulta bastante robusta.

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

La exposición de los resultados de la sección anterior muestra algunos aspectos interesantes sobre el tamaño de la prueba DF bajo rompimientos en la hipótesis nula. Desde luego, el problema de rechazo espurio de la hipótesis de raíz unitaria de la prueba DF resulta de algún tipo de rompimiento en la hipótesis nula. Hemos constatado el mismo patrón reportado en la literatura consultada, de experimentar una distorsión severa del rechazo de la hipótesis nula, sobre todo cuando el rompimiento se produce en la fase inicial de la muestra. Sin embargo, en este contexto, se tiene dos acotaciones particulares, dependiendo de los rompimientos analizados.

- 1) Se observa una supremacía de los efectos que resultan de la caída de la varianza del error sobre los cambios en nivel de la serie para la prueba DF. Ésto es, en la medida que la varianza del error no caiga abruptamente respecto de su nivel inicial y cuánto más próximo el punto de quiebre se encuentre a la fase final de la muestra, la tasa de rechazo espuria de la prueba DF se corrige.
- 2) Cuando existe un doble rompimiento del nivel de la serie, la prueba DF exhibe una divergencia recurrente de su valor nominal.

Este último resultado contrasta con los reportados por Cook (2002, 2003) en el sentido de que ya no interesa si el punto de quiebre se sitúa en la parte inicial o final de la muestra, debido a que la tasa de rechazo de la hipótesis nula de la prueba DF es superior a su valor nominal.

En relación al rompimiento simultáneo del nivel y la varianza de la serie, se tienen las siguientes anotaciones.

- a) El tamaño de la prueba DF se estabiliza sobre el valor de 5% en  $t=60, 40, 20$  para  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$  respectivamente con  $\theta=5$ , mientras que lo hace en  $t=10$  para  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$  y  $\theta=10$ . No hay bases para explicar por qué la prueba DF se estabiliza precisamente en tales puntos; sólo se puede recomendar el uso de la prueba DF cuando se tengan al menos 60 ó 10 observaciones antes del rompimiento, según los valores  $\delta$  y  $\theta$  considerados. En este contexto, sin embargo, la prueba DFR muestra

matter whether the break point is at the initial or final part of the sample, since the null hypothesis rejection rate of the DF test is above its nominal value.

As to simultaneous breaks in level and variance of the series, the following can be noted:

- a) DF test size stabilizes on 5% in  $t=60, 40, 20$ , for  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$ , respectively, with  $\theta=5$ , while it does so in  $t=10$  for  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$  and  $\theta=10$ . There are no bases to explain why the DF test stabilizes precisely on these points; it can only be recommended that the DF test be used when there are 60 or 10 observations before the break, depending on the  $\delta$  and  $\theta$  values considered. In this context, however, the DFR test shows experimental superiority given that its estimated size remains around 5% from the beginning of the sample, regardless of the presence of breaks.
- b) Even though DF test size converges rapidly at 5% in the case of  $\theta=10$  for different falls in the variance  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$ , at the same time a more severe rate of rejection of the null hypothesis occurs, compared with  $\theta=5$ . Considering that the DFR test does not experience any of these problems, it is recommendable to use it in such circumstances.

It is important to observe that in the measure in which the variance falls from its initial level, regardless of the magnitude of the break size of the series level, the DF test rejection rate is greater.

The DFR test does not have these types of distortion problems, except when the fall in the error variance is relatively important. Nevertheless, even in this case, the distortion of the test disappears in the final part of the sample.

## CONCLUSION

The DFR test is more robust than the DF for the unit root hypothesis for all of the cases examined in this study. The explanation of this quality of the DFR statistic lies in its power, which is greater because it uses the recursive estimator for the mean  $\mu$  of the series, and so it is free of any co-linearity with the error.

—End of the English version—



una superioridad experimental, dado que su tamaño estimado se conserva alrededor de 5% desde el principio de la muestra sin importar la presencia de rompimientos.

- b) Si bien el tamaño de la prueba DF converge rápidamente a 5% en el caso de  $\theta=10$  para distintas caídas en la varianza  $\delta=0.25, 0.50, 0.75$ , al mismo tiempo experimenta una tasa de rechazo de la hipótesis nula más severa en este caso comparado con  $\theta=5$ . Tomando en cuenta que la prueba DFR no experimenta ninguno de estos problemas, es recomendable su utilización en tales circunstancias.

Es importante observar que en la medida que la varianza caiga más respecto de su nivel inicial, sin importar la magnitud del tamaño del rompimiento del nivel de la serie, mayor es la tasa de rechazo de la prueba DF.

La prueba DFR no presenta estos tipos de problemas de distorsión, excepto cuando la caída de la varianza del error es relativamente importante. No obstante, incluso en este caso, la distorsión de la prueba desaparece en la parte final de la muestra.

### CONCLUSIÓN

La prueba DFR es más robusta que la DF para la hipótesis de raíz unitaria para todos los casos examinados en este trabajo. La explicación de esta cualidad

del estadístico DFR estriba en su potencia, la cual es mayor debido a que esta prueba utiliza el estimador recursivo para la media  $\mu$  de la serie, por lo que está libre de cualquier colinealidad con el error.

### LITERATURA CITADA

- Bhargava, A. 1986. On the theory of testing for unit roots in observed time series. *Rev. Econ. Studies* LIII: 369-384.
- Cook, S. 2002. Correcting size distortion of the Dickey-Fuller test via recursive mean adjustment. *Statist. Probability Letters* 60: 75-79.
- Cook, S. 2003. Size and power properties of powerful unit root tests in the presence of variance breaks. *Physica A*. 317: 432-448.
- Dickey, D.A., and Fuller, W.A. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *J. Am. Statist. Assoc.* 74(366): 427-431.
- Hamilton, J. D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press. New Jersey; pp: 762-765.
- Leybourne, S., and P. Newbold. 2000. Behavior of the standard and symmetric Dickey-Fuller type tests when there is a break under the null hypothesis. *Econometrics J.* 3: 1-15.
- Leybourne, S., T. Mills, and P. Newbold. 1998. Spurious rejections by Dickey-Fuller test in the presence of a break under the null hypothesis, *J. Econometrics* 87: 191-203.
- Perron, P. 1989. The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis, *Econometrica*, 57 (6): 1361-1401.
- Phillips, P.C.B. 1987. Time series regression with a unit root, *Econometrica* 55 (2): 277-301.
- Schwert, G.W. 1989. Tests for unit roots: A Monte Carlo investigation. *J. Business Econ. Statist.* 7(2): 147-159.
- Shin, D. W., and B.S. So. 2001. Recursive mean adjustment for unit root tests. *J. Time Series Analysis* 22 (5): 595-612.
- Shin, D. W., and B.S. So. 2002. Recursive mean adjustment and test for nonstationarities. *Econ. Letters* 75 (2): 203-208.