La obtención y proyección de tablas de mortalidad empleando curvas *spline*

Alejandro MINA-VALDÉS

El Colegio de México

Resumen

Una de las herramientas del análisis numérico es el uso de polinomios de n-ésimo orden para interpolar entre n + 1 puntos, teniéndose casos en donde estas funciones polinómicas pueden llevar a resultados erróneos. Una alternativa es la de aplicar polinomios de orden inferior a subconjuntos de datos. Estos polinomios conectados se llaman funciones de interpolación segmentaria (*spline functions*). En este artículo se presenta la herramienta que el análisis numérico proporciona como instrumento técnico necesario para llevar a cabo todos los procedimientos matemáticos existentes con base a algoritmos que permitan su simulación o cálculo, en especial, las funciones *splines* definidas a trozos (por tramos), con interpolación mediante ellas, dando lugar a el ajuste de curvas spline con base en la serie de sobrevivientes *lx* de una tabla abreviada de mortalidad mexicana, con el fin de desagregarla por edad desplegada, respetando las concavidades que por el efecto de la mortalidad en las primeras edades y en las siguientes se tienen en la experiencia mexicana. También empleando las curvas *splines* se presentan las simulaciones que permiten obtener escenarios futuros de las series de sobrevivientes *lx*, que dan lugar a las proyecciones de la mortalidad mexicana para los años 2010-2050, las que generan las tablas completas de mortalidad para hombres y mujeres de dicho periodo, resaltando las diferencias entre sexos y edades de sus probabilidades de supervivencia y las ganancias en las esperanzas de vida.

Palabras clave: interpolación polinómica, *splines*, tablas de mortalidad.

Abstract

Obtaining and projection of mortality tables using spline curves

One of the tools of numerical analysis is the use of polynomials of Nth order to interpolate between n+1 points, taking cases where these polynomial functions can lead to erroneous results. An alternative is to implement polynomials of lesser order than the subsets of data. These connected polynomials are called functions of segmental interpolation (spline functions). This article introduces the tool provided by numerical analysis as a technical instrument needed to carry out all existing mathematical procedures based on algorithms to enable its simulation or calculation, in particular, the functions spline defined in ranges (by sections), with interpolation through them, giving rise to the adjustment of spline curves based on surviving an abbreviated table of Mexican mortality lx series in order to disaggregate by age deployed, respecting the cavities that because of the effect of mortality in the early and following ages appear in the Mexican experience. Also using splines the simulations that allow obtaining future scenarios of the surviving lx series produces the Mexican mortality for the years 2010-2050, projections that generate complete tables of mortality for men and women of this period, highlighting the differences between sexes and ages of their chances to survive and increments in life expectancy.

Key words: polynomial interpolation, splines, tables of mortality.

Introducción

El análisis numérico proporciona el instrumento técnico necesario para llevar a cabo todos los procedimientos matemáticos existentes con base a algoritmos que permitan su simulación o cálculo. En el subcampo matemático del análisis numérico, una curva *spline* es definida a trozos (por tramos) mediante polinomios, teniéndose que en los problemas de interpolación se utiliza a menudo la interpolación mediante *splines* porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, con la ventaja de que se evitan las oscilaciones, que en la mayoría de las aplicaciones resultan indeseables, las que aparecen al interpolar mediante polinomios de grado elevado, en general mayores a grado 3. El trabajo presenta el ajuste de curvas *spline* con base en la serie de sobrevivientes *lx* de una tabla abreviada de mortalidad mexicana, con el fin de desagregarla por edad desplegada, respetando las concavidades que por el efecto de la mortalidad en las primeras edades y en las siguientes se tienen en la experiencia mexicana.

Una ventaja del empleo de las curvas *spline* es la posibilidad de hacer simulaciones que permitan obtener escenarios futuros de las series de sobrevivientes *lx*, por ello también se obtendrán mediante los ajustes *spline*, proyecciones de la mortalidad mexicana para los años 2010-2050, generando las tablas completas de mortalidad para hombres y mujeres de dicho periodo, lo que permitirá la cuantificación de las ganancias en la esperanza de vida por edad y sexo en México.

Interpolación segmentaria

El concepto de interpolación segmentaria se originó de la técnica de uso de una lámina de plástico delgada (llamada curvígrafo, en inglés *spline*) en el trazo de curvas suaves a través de un conjunto de puntos. En esta técnica, el dibujante colocaba papel sobre un tablero de madera y clavaba tachuelas en el papel (y en el tablero) en la posición de los datos. Al pasar un hilo entre las tachuelas se describía una curva cúbica suave. De ahí que se haya adoptado el nombre de "interpelación segmentaria" (*cubic spline*) para polinomios de este tipo.

En el análisis numérico es posible usar polinomios de n-ésimo orden para interpolar entre n + 1 puntos. Por ejemplo, en ocho puntos, se deriva un polinomio perfecto de séptimo orden. Esta curva captura todos los serpenteos (al menos considera hasta derivadas de séptimo orden) sugeridos

por los puntos. Sin embargo, existen casos en donde estas funciones pueden llevar a resultados erróneos. Una alternativa es la de aplicar polinomios de orden inferior a subconjuntos de datos. Estos polinomios conectados se llaman funciones de interpolación segmentaria *(spline functions).*

Por ejemplo, las curvas de tercer orden empleadas para conectar cada par de datos se llaman funciones de interpolación cúbica segmentaria (*cubic splines).* Estas funciones tienen la propiedad adicional de que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes son visualmente suaves. En principio pareciera que la aproximación segmentaría de tercer orden es inferior a la expresión de séptimo orden, lo que no es así.

Ahora bien, el objetivo de la interpolación cúbica segmentaria es obtener polinomios de tercer orden para cada uno de los intervalos entre nodos de la forma:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad (1)$$

Por to tanto, para los n + 1 puntos (i = 0, 1, 2,. . . , n), existen *n* intervalos y, por lo tanto, *4n* incógnitas constantes por evaluar. Como se hace para polinomios cuadráticos, en este caso se requiere de cinco condiciones para evaluar las incógnitas. Estas son:

1. Los valores de la funcion deben ser iguales en los nodos interiores
2. (2n 2 condiciones).
3. La primera y la última función deben pasar a través *de los* puntos finales (dos condiciones).
4. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben s*er* iguales (n - 1 condiciones).
5. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales (n - 1 condiciones).
6. Las segundas derivadas en los nodos finales son cero (dos condiciones).

La interpretación visual de la condición 5 es que la funcion sea una línea recta en los nodos finales. Debido a la especificación de esta condición es que se le llama interpolación segmentaria “natural”. Se le da este nombre ya que el polinomio interpolante se comporta de manera natural en este esquema. Si el valor de la segunda derivada en los nodos finales fuese diferente de cero (es decir, existe alguna curvatura), entonces esta información se usaría alternativamente para proporcionar las dos condiciones necesarias.

Los cinco tipos anteriores de condiciones proporcionan un total de *4n* ecuaciones necesarias para encontrar los *4n* coeficientes. De esta manera es posible obtener una interpolación cúbica segmentaria. Una manera práctica de generar el ajuste segementario mediante un *spline* cúbico es llevando a cabo los siguientes pasos:

El primer paso en la obtención se basa en la observación de que debido a que cada pareja de nodos esta conectada por un polinomio cúbico, la segunda derivada dentro de cada intervalo es una línea recta. La ecuación (1) se puede derivar dos veces para verificar esta observación. Con base a lo anterior, las segundas derivadas se representan mediante los polinomios de interpolacion de primer orden de Lagrange:

$$f_i''(x) = f''(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f''(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (2)$$

En donde $f_i''(x)$ es el valor de la segunda derivada en el primer nodo x dentro del iesimo intervalo. Por to tanto, esta ecuación es una linea recta que conecta la segunda derivada en el primer nodo $f''(x_{i-1})$ con la segunda derivada en el segundo nodo $f''(x_i)$.

Como segundo paso, la ecuación (2) se integra dos veces y se obtiene una expresión para $f_i(x)$. Sin embargo, esta expresión tiene dos incógnitas constantes de integración. Estas constantes se evalúan considerando las condiciones de equiespaciamiento $f(x)$ debe ser igual $f(x_{i-1})$ en x_{i-1} y $f(x_i)$ debe ser igual a $f(x_i)$ en x_i. Llevando a cabo estas evaluaciones, se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$\begin{aligned} f_i(x) = {} & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 \\ & + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) \\ & + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) \qquad (3) \end{aligned}$$

Cabe destacar que esta expresión es mucho más complicada para los polinomios de interpolación segmentaria en el i-ésimo intervalo, es decir, la ecuación (1). Sin embargo, nótese que esta contiene sólo dos "coeficientes" incógnitas, las segundas derivadas al principio y al final del intervalo, $f''(x_{i-l})\, y\, f''(x_i)$. Por lo tanto, si se determina propiamente la segunda derivada en cada nodo, la ecuaci6n (3) es un polinomio de tercer orden que se usa para interpolar dentro de un intervalo.

Las segundas derivadas se evalúan usando la condición de que las primeras derivadas en los nodos deben ser continuas:

$$f'_{i-1} = f'_i(x_i) \tag{4}$$

La ecuación (3) se deriva y se obtiene una expresión de la primera derivada. Si esto se hace para los $(i\ +1)$esimos a iésimos y los dos resultados se igualan, de acuerdo a la ecuación (4), obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}&(x_i - x_{i-1})\mathrm{f}''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})\mathrm{f}''(\mathrm{x}_i) + (x_{i+1} - x_i)\mathrm{f}''(x_{i+1})\\ &= \frac{6}{(x_{i-1} - x_i)}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i+1})}[\mathrm{f}(x_{i-1}) - \mathrm{f}(x_i)\end{aligned} \tag{5}$$

Dado que la ecuación (5) se escribe para todos los nodos interiores, resultan n - 1 ecuaciones simultáneas con n + 1 segundas derivadas incógnitas. Sin embargo ya que este es un polinomio interpolante "natural", las segundas derivadas en los nodos finales son cero y el problema reduce a n - 1 ecuaciones con n - 1 incógnitas. Ademas notése que el sistema de ecuaciones será tridiagonal. Por lo tanto, no só1o se tiene que reducir el número de ecuaciones sino que también se calculan de forma que sean muy fáciles de resolver.

Finalmente, la derivación genera las siguientes ecuaciones cúbicas para cada intervalo:

$$\begin{aligned}f_i(x) = {} & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x^3) + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1}) + \\ & \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \\ & \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x)\end{aligned}$$

La ecuación contiene únicamente dos incógnitas, las segundas derivadas al final de cada intervalo. Dichas incógnitas se evalúan usando la ecuación siguiente:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_{i+1})$$
$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}\left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right]$$

Como esta ecuación se escribe para todos los nodos interiores, se generan n -1 incógnitas (segundas derivadas en los nodos finales son cero).

Cabe mencionar que las *splines cúbicas* han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente.

Así pues, podemos decir de manera concreta, que una función *spline* está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.

Para un *spline* de grado k, suponemos que $x_0 < x_1 < \ldots x_n$, y dado k un número entero positivo, una función de interpolación *spline* de grado k, para la tabla de datos, es una función $s(x)$ tal que:

i) $s(x_i) = y_i$, para toda $i = 0, 1, \ldots, n$.
ii) $s(x_i)$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
iii) $s(x_i)$ tiene derivada contínua hasta de orden k - 1 en $[x_0, x_n]$.

Así, para una función *spline* de grado uno que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, entonces:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & si \quad x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & s \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_n(x) & si \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde:

i) $s_j(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1.
ii) $s(x)$ tiene derivada continua de orden $k-1=0$.
iii) $s(x_j) = y_j$, para $j = 0, 1, \ldots, n$.

Por lo tanto, la *spline* de grado 1 queda definida como:

$$s(x)=\begin{cases} y_0+f[x_1,x_0](x-x_0) & si \quad x\in[x_0,x_1] \\ y_1+f[x_2,x_1](x-x_1) & si \quad x\in[x_1,x_2] \\ & \vdots \\ y_{n-1}+f[x_n,x_{n-1}](x-x_{n-1}) & si \quad x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

donde $f[x_i, x_j]$ es la diferencia dividida de Newton.

El siguiente caso, que es el más importante en las aplicaciones, sigue exactamente los mismos pasos del ejemplo que acabamos de resolver, solamente que en vez de trabajar con polinomios cuadráticos, lo hace con polinomios cúbicos.

Y para una *spline* cúbica que interpola n + 1 datos, es una función $s(x)$ tal que:

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x) & si \quad x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x) & si \quad x\in[x_1,x_2] \\ & \vdots \\ s_{n-1}(x) & si \quad x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

donde cada $s_i(x)$ es un polinomio cúbico; $s_i(x) = y_i$, para toda $i = 0, 1,..., n$ y tal que $s_i(x)$ tiene primera y segunda derivadas contínuas en $[x_0 , x_n]$.

Resultados obtenidos con la aplicación *SPLINE*

Empleando los *splines* podemos desagregar las estructuras por edades de la población que tenemos por grupos quinquenales de edades en edades individuales, con el fin de tener los denominadores de las tasas específicas de mortalidad para la elaboración de las tablas completas de vida.

En términos prácticos, se desea desagregar el histograma o pirámide de población, de barras que representan grupos quinquenales a barras que representen edades individuales.

El algoritmo que lo permite, empleando los *splines*, se detalla a continuación, comparando sus resultados con los que se obtienen con el uso de los factores que Henry Beers obtuvo con sus fórmulas de interpolación.[1]

Supongamos: $x_1 < x_2 < x_3 <...< x_{n+1}$, y que h_i es la altura de la barra correspondiente al intervalo $[x_i , x_{1+1}]$.

[1] Ver: Beers Henry, "Six-Term Formulas for Routine Actuarial Interpolation" en *Record of the American Institute of Actuaries*, vol.34, june, 1945.

Sea h_i la frecuencia observada en la i-ésima clase.

Entonces $h_i(x_{i+1} - x_i) = h_i \Delta x_i$ representa la frecuencia relativa fr(i) en el intervalo $[x_i , x_{i+1}]$

$\therefore$

$$h_i \Delta x_i = fr(i) = \frac{fa(i)}{\sum_{j=1}^{n} fa(j)}$$

donde fa(i) es la frecuencia absoluta de la i-ésima clase.

La función de densidad permite calcular la probabilidad de que la variable tome valores en un cierto intervalo [a,b] y es igual a:

$$\int_a^b f(x)dx = P[a \le x \le b]$$

y el valor esperado de x y su desviación estándar:

$$E(x) = \int_{x_1}^{x_n} xf(x)dx \qquad \sigma = \left[\int_{x_1}^{x_n} (x - E(x))^2) f(x)dx \right]^{1/2}$$

la condición del *spline* parabólico f que suaviza el histograma es:

$$\int_a^b f(x)dx = h_i \Delta x_i$$

Para cada sección $P_i(x)$ de f se puede escribir vía la fórmula de Taylor como:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

donde :

$$a_i = f(x_i), \quad b_i = f'(x_i) \qquad y \quad c_i = f''(x_i)/2!$$

i.e.

$$P_i(x) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{(x - x_i)}{1!} + f''(x_i)\frac{(x - x_i)^2}{2!}$$

El problema fundamental consiste en escoger los polinomios $r_1(x)$, $r_2(x)$ y $r_3(x)$ tales que:

$$P_i(x) = a_1 r_1(x) + b_1 r_2(x) + c_1 r_3(x) \qquad para: x_i \le x \le x_{i+1}$$

$sea:$

$$y = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \qquad para: \quad i = 1,2,3,...,n$$

$$\Rightarrow f(x) = P_i(y) = a_1 r_1(y) + b_1 r_2(y) + c_1 r_3(y), con \quad 0 \le y \le 1$$

$sean:$

$$r_1(x) = (1-y)(1-3y) = 1 - 4y + 3y^2$$
$$r_2(x) = y(3y-2) = 3y^2 - 2y$$
$$r_3(y) = 6y(1-y) = 6y - 6y^2$$

Nótese que:

$$r_1(0) = 1, \quad r_1(1) = 0, \quad \int_0^1 r_1(x)dx = 0$$

$$r_2(0) = 0, \quad r_2(1) = 1, \quad \int_0^1 r_2(x)dx = 0$$

$$r_3(0) = 0, \quad r_3(1) = 0, \quad \int_0^1 r_3(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow f(x_i) = P_i(0) = a_i r_1(0) + b_i r_2(0) + c_i r_3(0) = a_i(1) + b_i(0) + c_i(0) = a_i$$
$$y \quad f(x_{i+1}) = P_i(1) = a_i r_1(1) + b_i r_2(1) + c_i r_3(1) = a_i(0) + b_i(1) + c_i(0) = b_i$$

Y ya que en el histograma se satisface que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^1 P_i(y)\Delta x_i dy = \Delta x_i \int_0^1 P_i(y)dy =$$

$$\Delta x_i \int_0^1 (a_i r_1(y) + b_i r_2(y) + c_i r_3(y)d)y$$

$$= \Delta x_i (a_i(0) + b_i(0) + c_i(1)) = \Delta x_i c_i = h_i \Delta x_i$$

$\therefore$

$c_i = h_i$

Finalmente :

$f(x) = P_i(x) = f(x_i)r_i(y) + f(x_{i+1})r_2(y) + h_i r_3(y)$

Para garantizar la continuidad, se obtiene para $x_i \leq x_{i-1}$

$$f'(x) = \frac{P'_i(y)}{\Delta x_i} = \left[f(x_i)(6y-4) + f(x_{i+1})(6y-2) + h_i(6y-12y)\right] / \Delta x_i$$

De tal manera que la condición de continuidad de f´: $P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i)$, $i = 2,..., n$, es tal que:

$\Delta x_i f(x_{i-1}) + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) f(x_i) + \Delta x_{i-1} f(x_{i+1}) = 3(\Delta x_i h_{i-1} + \Delta x_{i-1} h_i)$

tomando :

$$d_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \qquad y \qquad e_i = 3(d_i h_{i-1} + (1-d_i)h_i)$$

entonces :

$d_i f(x_{i-1}) + 2f(x_i) + (1-d_i) f(x_{i+1}) = e_i \qquad i = 2,...n$

$con : f(x_i) = e_i = f(x_{n+1}) = e_{n+1} = 0$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ d_2 & 2 & (1-d_2) & . & . & . & . & & & & \\ 0 & d_3 & 2 & (1-d_3) & . & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & & \\ 0 & . & . & . & . & d_n & 2 & (1-d_n) & & & \\ 0 & . & . & . & . & . & & & & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$donde : \qquad e_1 = e_{n+1} = 0$

y para corregir los extremos se tiene que:

$$2f(x_1)+f(x_2)=3h_i=e_1$$

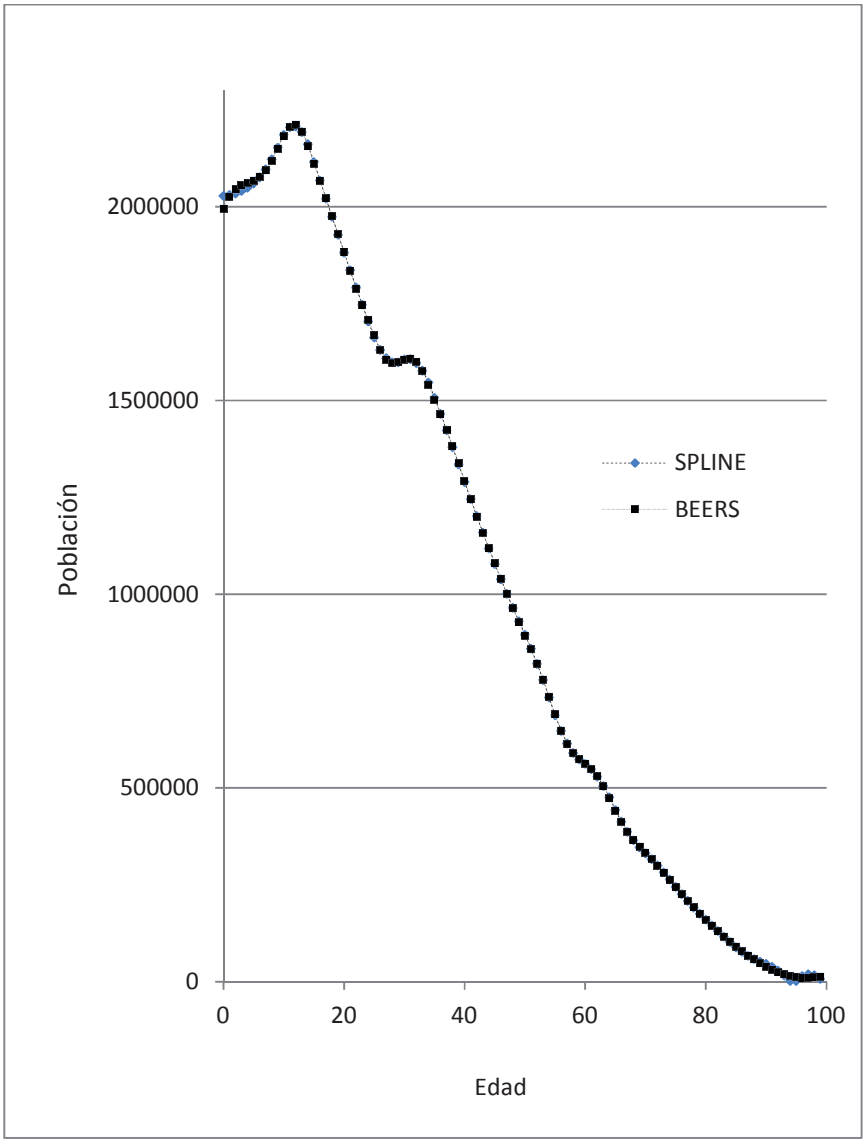
$$y$$

$$f(x_n)+2f(x_{n+1})=3h_n=e_{n+1}$$

Modificándose el sistema matricial a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & . & & & 0 \\ d_2 & 2 & (1-d_2) & . & . & . & . & & & \\ 0 & d_3 & 2 & (1-d_3) & . & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & . & & d_n & 2 & (1-d_n) & \\ 0 & . & . & . & . & . & & 1 & 2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ e_{n+1} \end{bmatrix}$$

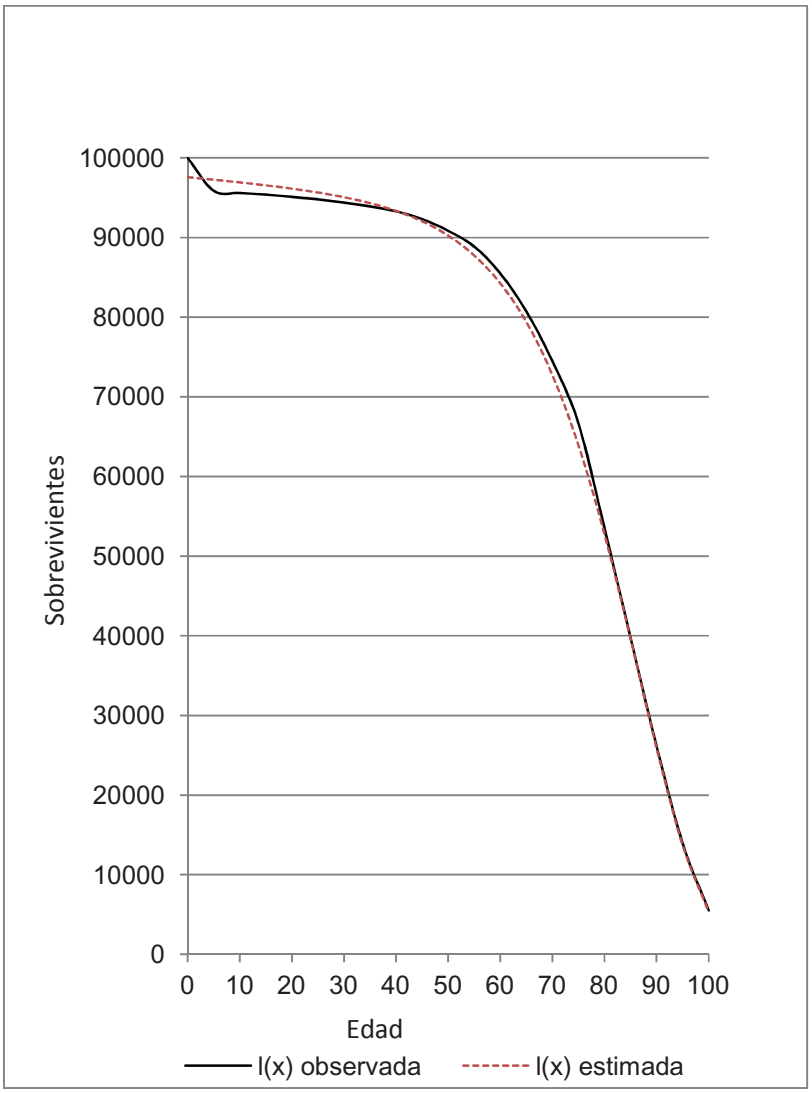
Gráfica 1. Desagregación obtenida vía *histospline* y vía factores de Beers 2005



Fuente: elaboración del autor.

En el ajuste y proyección de las funciones de supervivencia, que permiten la elaboración de tablas de vida desagregadas por edad, se han empleado funciones como la Gompertz, Gompertz-Makeham, y Lazarus, entre otras, las que tiene el problema del ajuste de ellas en las primeras edades, ya que la concavidad no se ajusta a dichas funciones, si bien es cierto que lo hacen para el resto de las edades.

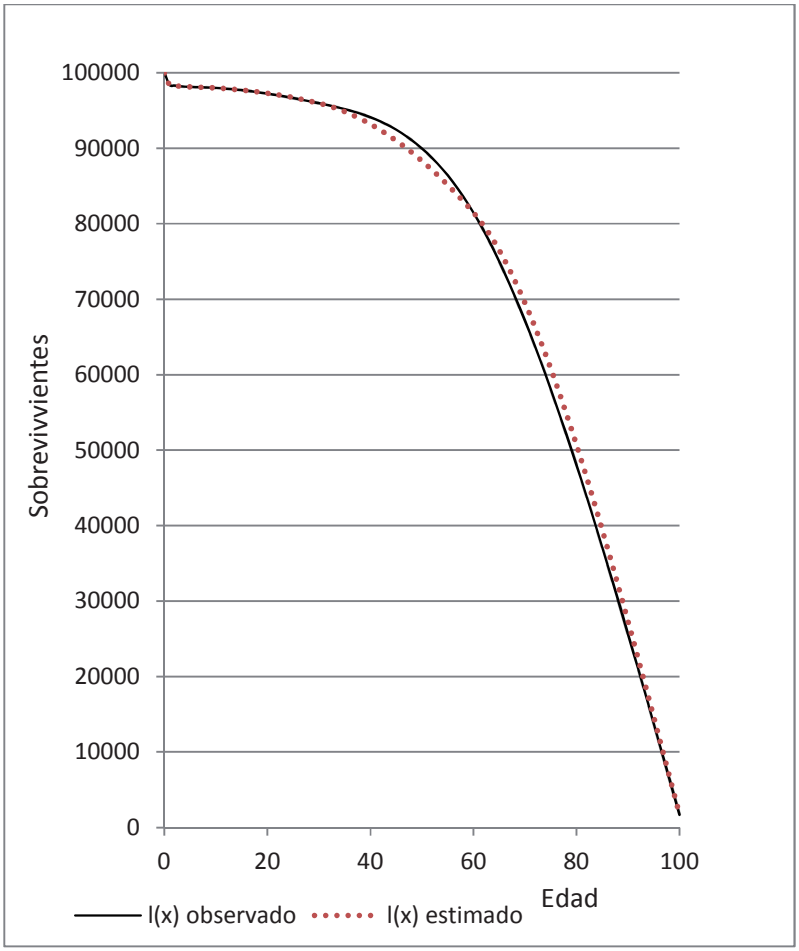
Gráfica 2. México: ajuste Gompertz-Makeham 2005



Fuente: elaboración del autor.

Con el ajuste de interpolación segmentaria (*spline*) se logra superar el problema ya que al ajustarse un polinomio de grado tres en las primeras edades la concavidad se conserva en el ajuste.

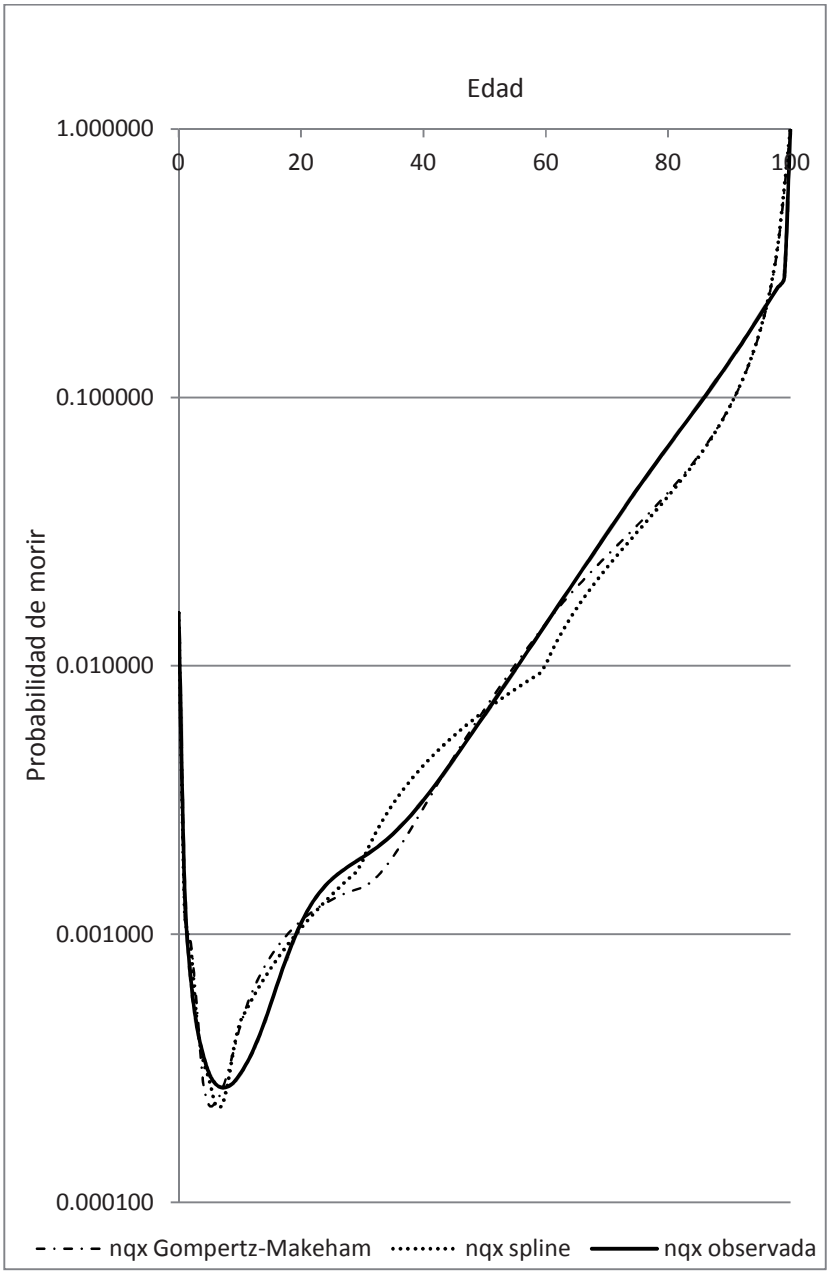
Gráfica 3. Ajuste *spline* 2005



Fuente: elaboración del autor.

Una de las ventajas del ajuste *spline* es que la tendencia de las probabilidades de muerte ${}_nq_x$ de las tablas de vida son consistentes con las tendencias observadas, hecho que no necesariamente se da en los ajustes tipo Gompertz-Makeham.

Gráfica 4. Comparación de ajustes de ${}_nq_x$ 2005



Fuente: elaboración del autor.

El *spline* obtenido de los sobrevivientes a edad exacta (lx) por sexo, para el año 2010, por nodos especificados en rango de edades es:

Cuadro 1. México: lx-*spline* por sexo, 2010

Rango de edades	Polinomio
Hombres	
0-5	$-5.2640x^3 + 63.8268x^2 - 290.8945x + 98\,661.1524$
6-24	$-0.1642x^3 + 3.8579x^2 - 55.6200x + 98\,344.2181$
24 -69	$-0.4133x^3 + 39.6988x^2 – 1\,469.1728x + 115\,312.2847$
70 -100	$2.2249x^3 - 541.6550x^2 + 41\,217.1692x – 928\,245.0081$
Mujeres	
0 -5	$3.4226x^3 + 43.4798x^2 - 215.6789x + 98\,921.5714$
6-24	$-0.0247x^3 + 0.2489x^2 - 16.632x + 98\,567$
24-69	$-0.3865x^3 + 39.9820x^2 – 1\,445.0263x + 115\,382.8753$
70-100	$3.2764x^3 - 824.5830x^2 + 65\,949.7388x – 1\,623\,309.1608$

Fuente: cálculos propios.

Las tablas de vida por edad individual, para hombres y mujeres a nivel nacional para el año 2010, obtenida con el ajuste *spline* son:

Cuadro 2. México: tabla de vida por sexo y edad desplegada, 2010. Hombres

x	nqx	lx	dx	1Lx	Tx	ex
0	0.015706	100 000	1 571	99 214.7	7 305 733.0	73.06
1	0.001412	98 429	139	98 359.9	7 206 518.3	73.22
2	0.000675	98 290	66	98 257.2	7 108 158.4	72.32
3	0.000451	98 224	44	98 201.9	7 009 901.2	71.37
4	0.000355	98 180	35	98 162.3	6 911 699.3	70.40
5	0.000301	98 145	30	98 130.1	6 813 537.0	69.42
6	0.000277	98 115	27	98 101.8	6 715 406.9	68.44
7	0.000268	98 088	26	98 075.1	6 617 305.1	67.46
8	0.000270	98 062	26	98 048.7	6 519 230.1	66.48
9	0.000280	98 035	27	98 021.8	6 421 181.4	65.50
10	0.000300	98 008	29	97 993.4	6 323 159.6	64.52
11	0.000326	97 979	32	97 962.7	6 225 166.2	63.54
12	0.000361	97 947	35	97 929.0	6 127 203.5	62.56
13	0.000408	97 911	40	97 891.4	6 029 274.5	61.58
14	0.000468	97 871	46	97 848.5	5 931 383.1	60.60
15	0.000544	97 826	53	97 799.0	5 833 534.5	59.63
16	0.000636	97 772	62	97 741.3	5 735 735.5	58.66
17	0.000741	97 710	72	97 674.0	5 637 994.2	57.70
18	0.000856	97 638	84	97 596.0	5 540 320.3	56.74
19	0.000976	97 554	95	97 506.6	5 442 724.3	55.79
20	0.001096	97 459	107	97 405.6	5 345 217.7	54.85
21	0.001213	97 352	118	97 293.1	5 247 812.1	53.91
22	0.001323	97 234	129	97 169.8	5 150 518.9	52.97
23	0.001424	97 105	138	97 036.3	5 053 349.2	52.04
24	0.001515	96 967	147	96 893.8	4 956 312.8	51.11
25	0.001596	96 820	155	96 743.1	4 859 419.1	50.19
26	0.001670	96 666	161	96 585.1	4 762 676.0	49.27
27	0.001737	96 504	168	96 420.6	4 666 090.9	48.35
28	0.001800	96 337	173	96 250.1	4 569 670.3	47.43
29	0.001862	96 163	179	96 073.8	4 473 420.2	46.52
30	0.001926	95 984	185	95 891.8	4 377 346.4	45.60
31	0.001994	95 799	191	95 703.9	4 281 454.5	44.69
32	0.002069	95 608	198	95 509.4	4 185 750.7	43.78
33	0.002153	95 411	205	95 307.8	4 090 241.2	42.87
34	0.002248	95 205	214	95 098.1	3 994 933.5	41.96
35	0.002356	94 991	224	94 879.1	3 899 835.4	41.05
36	0.002479	94 767	235	94 649.8	3 804 956.3	40.15
37	0.002618	94 532	247	94 408.6	3 710 306.5	39.25
38	0.002775	94 285	262	94 154.0	3 615 898.0	38.35
39	0.002950	94 023	277	93 884.5	3 521 744.0	37.46
40	0.003147	93 746	295	93 598.3	3 427 859.5	36.57
41	0.003365	93 451	314	93 293.6	3 334 261.2	35.68
42	0.003606	93 136	336	92 968.4	3 240 967.6	34.80
43	0.003871	92 801	359	92 620.9	3 147 999.1	33.92
44	0.004163	92 441	385	92 248.8	3 055 378.3	33.05
45	0.004482	92 056	413	91 850.1	2 963 129.4	32.19
46	0.004830	91 644	443	91 422.5	2 871 279.3	31.33
47	0.005210	91 201	475	90 963.6	2 779 856.9	30.48
48	0.005622	90 726	510	90 470.9	2 688 893.3	29.64
49	0.006070	90 216	548	89 942.1	2 598 422.4	28.80
50	0.006555	89 668	588	89 374.4	2 508 480.3	27.98

Fuente: cálculos propios.

Cuadro 2. México: tabla de vida por sexo y edad desplegada, 2010. Hombres

x	nqx	lx	dx	1Lx	Tx	ex
51	0.007081	89 080	631	88 765.1	2 419 105.9	27.16
52	0.007649	88 450	677	88 111.4	2 330 340.8	26.35
53	0.008264	87 773	725	87 410.4	2 242 229.4	25.55
54	0.008928	87 048	777	86 659.2	2 154 818.9	24.75
55	0.009645	86 271	832	85 854.5	2 068 159.8	23.97
56	0.010431	85 439	891	84 992.9	1 982 305.2	23.20
57	0.011279	84 547	954	84 070.5	1 897 312.3	22.44
58	0.012197	83 594	1 020	83 083.9	1 813 241.8	21.69
59	0.013189	82 574	1 089	82 029.6	1 730 157.9	20.95
60	0.014261	81 485	1 162	80 904.0	1 648 128.3	20.23
61	0.015419	80 323	1 239	79 703.7	1 567 224.3	19.51
62	0.016671	79 084	1 318	78 425.3	1 487 520.6	18.81
63	0.018023	77 766	1 402	77 065.3	1 409 095.3	18.12
64	0.019484	76 365	1 488	75 620.6	1 332 030.0	17.44
65	0.021062	74 877	1 577	74 088.1	1 256 409.4	16.78
66	0.022766	73 300	1 669	72 465.3	1 182 321.3	16.13
67	0.024606	71 631	1 763	70 749.6	1 109 856.0	15.49
68	0.026593	69 868	1 858	68 939.3	1 039 106.4	14.87
69	0.028739	68 010	1 955	67 033.0	970 167.1	14.27
70	0.031054	66 056	2 051	65 030.1	903 134.1	13.67
71	0.033553	64 004	2 148	62 930.7	838 104.0	13.09
72	0.036249	61 857	2 242	60 735.8	775 173.3	12.53
73	0.039158	59 615	2 334	58 447.4	714 437.5	11.98
74	0.042294	57 280	2 423	56 068.9	655 990.1	11.45
75	0.045676	54 858	2 506	53 604.8	599 921.2	10.94
76	0.049132	52 352	2 572	51 065.9	546 316.4	10.44
77	0.052836	49 780	2 630	48 464.7	495 250.5	9.95
78	0.056801	47 150	2 678	45 810.5	446 785.8	9.48
79	0.061046	44 471	2 715	43 114.1	400 975.3	9.02
80	0.065585	41 757	2 739	40 387.4	357 861.2	8.57
81	0.070437	39 018	2 748	37 643.9	317 473.8	8.14
82	0.075619	36 270	2 743	34 898.4	279 829.9	7.72
83	0.081148	33 527	2 721	32 166.7	244 931.5	7.31
84	0.087044	30 806	2 682	29 465.7	212 764.8	6.91
85	0.093470	28 125	2 629	26 810.5	183 299.1	6.52
86	0.100477	25 496	2 562	24 215.2	156 488.6	6.14
87	0.108120	22 934	2 480	21 694.5	132 273.4	5.77
88	0.116458	20 455	2 382	19 263.6	110 578.9	5.41
89	0.125556	18 073	2 269	16 938.0	91 315.3	5.05
90	0.135485	15 803	2 141	14 732.9	74 377.3	4.71
91	0.146321	13 662	1 999	12 662.8	59 644.5	4.37
92	0.158143	11 663	1 844	10 741.0	46 981.7	4.03
93	0.171514	9 819	1 684	8 976.7	36 240.7	3.69
94	0.186060	8 135	1 514	7 377.9	27 264.0	3.35
95	0.201870	6 621	1 337	5 952.9	19 886.0	3.00
96	0.219035	5 285	1 158	4 705.8	13 933.2	2.64
97	0.237646	4 127	981	3 636.7	9 227.4	2.24
98	0.257792	3 146	811	2 740.7	5 590.7	1.78
99	0.279559	2 335	653	2 008.8	2 850.0	1.22
100	1.000000	1 682	1682	841.2	841.2	0.57

Fuente: cálculos propios.

Cuadro 2. México: tabla de vida por sexo y edad desplegada, 2010. Mujeres

x	nqx	lx	dx	1Lx	Tx	ex
0	0.012537	100 000	1 254	99 373.1	7 775 890.4	77.76
1	0.001122	98 746	111	98 690.9	7 676 517.2	77.74
2	0.000609	98 635	60	98 605.4	7 577 826.4	76.83
3	0.000418	98 575	41	98 554.8	7 479 221.0	75.87
4	0.000320	98 534	32	98 518.4	7 380 666.2	74.90
5	0.000265	98 503	26	98 489.6	7 282 147.7	73.93
6	0.000227	98 477	22	98 465.4	7 183 658.1	72.95
7	0.000203	98 454	20	98 444.3	7 085 192.7	71.96
8	0.000188	98 434	19	98 425.0	6 986 748.4	70.98
9	0.000181	98 416	18	98 406.8	6 888 323.4	69.99
10	0.000182	98 398	18	98 388.9	6 789 916.6	69.00
11	0.000189	98 380	19	98 370.7	6 691 527.6	68.02
12	0.000204	98 361	20	98 351.3	6 593 156.9	67.03
13	0.000225	98 341	22	98 330.2	6 494 805.6	66.04
14	0.000251	98 319	25	98 306.8	6 396 475.4	65.06
15	0.000279	98 294	27	98 280.8	6 298 168.6	64.07
16	0.000306	98 267	30	98 252.1	6 199 887.8	63.09
17	0.000331	98 237	33	98 220.8	6 101 635.7	62.11
18	0.000353	98 204	35	98 187.2	6 003 414.9	61.13
19	0.000371	98 170	36	98 151.6	5 905 227.8	60.15
20	0.000386	98 133	38	98 114.5	5 807 076.1	59.18
21	0.000398	98 096	39	98 076.0	5 708 961.6	58.20
22	0.000410	98 056	40	98 036.4	5 610 885.6	57.22
23	0.000422	98 016	41	97 995.6	5 512 849.3	56.24
24	0.000435	97 975	43	97 953.6	5 414 853.7	55.27
25	0.000451	97 932	44	97 910.2	5 316 900.1	54.29
26	0.000471	97 888	46	97 865.1	5 218 989.9	53.32
27	0.000494	97 842	48	97 817.8	5 121 124.8	52.34
28	0.000523	97 794	51	97 768.1	5 023 307.0	51.37
29	0.000557	97 743	54	97 715.3	4 925 538.9	50.39
30	0.000597	97 688	58	97 659.0	4 827 823.5	49.42
31	0.000643	97 630	63	97 598.5	4 730 164.5	48.45
32	0.000696	97 567	68	97 533.1	4 632 566.1	47.48
33	0.000756	97 499	74	97 462.3	4 535 032.9	46.51
34	0.000825	97 425	80	97 385.3	4 437 570.6	45.55
35	0.000901	97 345	88	97 301.2	4 340 185.3	44.59
36	0.000987	97 257	96	97 209.4	4 242 884.1	43.63
37	0.001082	97 161	105	97 108.8	4 145 674.7	42.67
38	0.001188	97 056	115	96 998.6	4 048 565.9	41.71
39	0.001305	96 941	127	96 877.7	3 951 567.3	40.76
40	0.001434	96 814	139	96 745.0	3 854 689.6	39.82
41	0.001577	96 676	152	96 599.4	3 757 944.5	38.87
42	0.001734	96 523	167	96 439.5	3 661 345.2	37.93
43	0.001906	96 356	184	96 263.9	3 564 905.7	37.00
44	0.002096	96 172	202	96 071.3	3 468 641.8	36.07
45	0.002304	95 971	221	95 860.0	3 372 570.4	35.14
46	0.002532	95 749	242	95 628.2	3 276 710.5	34.22
47	0.002783	95 507	266	95 374.0	3 181 082.3	33.31
48	0.003057	95 241	291	95 095.6	3 085 708.3	32.40
49	0.003357	94 950	319	94 790.7	2 990 612.7	31.50
50	0.003686	94 631	349	94 456.9	2 895 822.1	30.60

Fuente: cálculos propios.

Cuadro 2. México: tabla de vida por sexo y edad desplegada, 2010. Mujeres

x	nqx	lx	dx	1Lx	Tx	ex
51	0.004045	94 283	381	94 091.8	2 801 365.2	29.71
52	0.004439	93 901	417	93 692.7	2 707 273.4	28.83
53	0.004870	93 484	455	93 256.6	2 613 580.7	27.96
54	0.005341	93 029	497	92 780.6	2 520 324.0	27.09
55	0.005856	92 532	542	92 261.2	2 427 543.5	26.23
56	0.006429	91 990	591	91 694.6	2 335 282.3	25.39
57	0.007057	91 399	645	91 076.4	2 243 587.7	24.55
58	0.007746	90 754	703	90 402.4	2 152 511.3	23.72
59	0.008502	90 051	766	89 668.2	2 062 108.8	22.90
60	0.009332	89 285	833	88 868.8	1 972 440.7	22.09
61	0.010242	88 452	906	87 999.2	1 883 571.9	21.29
62	0.011240	87 546	984	87 054.3	1 795 572.6	20.51
63	0.012335	86 562	1 068	86 028.4	1 708 518.4	19.74
64	0.013536	85 495	1 157	84 915.9	1 622 490.0	18.98
65	0.014853	84 337	1 253	83 710.9	1 537 574.1	18.23
66	0.016298	83 085	1 354	82 407.5	1 453 863.2	17.50
67	0.017881	81 730	1 461	80 999.7	1 371 455.7	16.78
68	0.019617	80 269	1 575	79 481.7	1 290 456.0	16.08
69	0.021519	78 694	1 693	77 847.6	1 210 974.3	15.39
70	0.023604	77 001	1 818	76 092.2	1 133 126.7	14.72
71	0.025888	75 183	1 946	74 210.2	1 057 034.5	14.06
72	0.028389	73 237	2 079	72 197.5	982 824.3	13.42
73	0.031129	71 158	2 215	70 050.4	910 626.8	12.80
74	0.034128	68 943	2 353	67 766.4	840 576.4	12.19
75	0.037411	66 590	2 491	65 344.4	772 810.0	11.61
76	0.040792	64 099	2 615	62 791.4	707 465.7	11.04
77	0.044465	61 484	2 734	60 117.1	644 674.3	10.49
78	0.048453	58 750	2 847	57 326.8	584 557.2	9.95
79	0.052778	55 904	2 950	54 428.3	527 230.4	9.43
80	0.057466	52 953	3 043	51 431.5	472 802.1	8.93
81	0.062543	49 910	3 122	48 349.3	421 370.6	8.44
82	0.068037	46 788	3 183	45 196.8	373 021.3	7.97
83	0.073974	43 605	3 226	41 992.3	327 824.5	7.52
84	0.080386	40 379	3 246	38 756.5	285 832.2	7.08
85	0.087381	37 134	3 245	35 511.2	247 075.7	6.65
86	0.095011	33 889	3 220	32 278.9	211 564.5	6.24
87	0.103334	30 669	3 169	29 084.4	179 285.6	5.85
88	0.112407	27 500	3 091	25 954.2	150 201.2	5.46
89	0.122297	24 409	2 985	22 916.1	124 246.9	5.09
90	0.133071	21 424	2 851	19 998.1	101 330.8	4.73
91	0.144800	18 573	2 689	17 228.0	81 332.7	4.38
92	0.157561	15 883	2 503	14 632.1	64 104.7	4.04
93	0.170952	13 381	2 287	12 237.0	49 472.6	3.70
94	0.185520	11 093	2 058	10 064.3	37 235.6	3.36
95	0.201354	9 035	1 819	8 125.6	27 171.3	3.01
96	0.218544	7 216	1 577	6 427.5	19 045.7	2.64
97	0.237182	5 639	1 337	4 970.2	12 618.2	2.24
98	0.257357	4 302	1 107	3 748.0	7 648.0	1.78
99	0.279154	3 194	892	2 748.6	3 900.0	1.22
100	1.000000	2 303	2 303	1 151.4	1 151.4	0.61

Fuente: cálculos propios.

Y las esperanzas de vida que se obtuvieron con el ajuste *spline*-lx proyectando los parámetros de los polinomios por nodos, para los años 2010 al 2050, por edad y sexo, tomadas de tablas de vida completas obtenidas son:

Cuadro 3. Esperanza de vida ajustada. Hombres

Edad	ex.2010	ex.2015	ex.2020	ex.2025	ex.2030	ex.2035	ex.2040	ex.2045	ex.2050
0	73.06	73.85	74.81	75.73	76.61	77.45	78.26	79.03	79.78
5	69.42	70.02	70.82	71.59	72.35	73.08	73.79	74.49	75.17
10	64.52	65.10	65.88	66.64	67.39	68.11	68.82	69.51	70.18
15	59.63	60.20	60.96	61.71	62.45	63.16	63.86	64.54	65.21
20	54.85	55.38	56.13	56.86	57.58	58.28	58.96	59.63	60.29
25	50.19	50.69	51.41	52.11	52.80	53.48	54.14	54.79	55.43
30	45.60	46.06	46.74	47.41	48.06	48.71	49.35	49.97	50.59
35	41.05	41.46	42.10	42.72	43.34	43.96	44.56	45.16	45.76
40	36.57	36.92	37.51	38.09	38.67	39.25	39.82	40.39	40.96
45	32.19	32.49	33.02	33.56	34.10	34.64	35.18	35.71	36.25
50	27.98	28.22	28.70	29.19	29.69	30.18	30.68	31.18	31.67
55	23.97	24.15	24.59	25.03	25.48	25.93	26.38	26.83	27.29
60	20.23	20.34	20.73	21.12	21.52	21.92	22.32	22.73	23.14
65	16.78	16.84	17.17	17.51	17.85	18.20	18.55	18.91	19.27
70	13.67	13.69	13.97	14.25	14.54	14.83	15.13	15.43	15.74
75	10.94	10.94	11.16	11.39	11.63	11.87	12.11	12.36	12.61
80	8.57	8.57	8.75	8.93	9.12	9.31	9.51	9.71	9.91
85	6.52	6.52	6.65	6.79	6.93	7.08	7.22	7.37	7.53
90	4.71	4.71	4.80	4.89	4.98	5.07	5.17	5.26	5.36
95	3.00	3.00	3.04	3.08	3.12	3.16	3.21	3.25	3.29

Fuente: cálculos propios.

Cuadro 3. Esperanza de vida ajustada. Mujeres

Edad	ex.2010	ex.2015	ex.2020	ex.2025	ex.2030	ex.2035	ex.2040	ex.2045	ex.2050
0	77.76	78.42	79.32	80.17	80.98	81.75	82.48	83.18	83.84
5	73.93	74.42	75.18	75.91	76.61	77.28	77.93	78.56	79.17
10	69.00	69.48	70.23	70.95	71.64	72.31	72.96	73.58	74.19
15	64.07	64.54	65.28	65.99	66.67	67.33	67.98	68.60	69.20
20	59.18	59.62	60.35	61.05	61.72	62.38	63.01	63.62	64.22
25	54.29	54.72	55.42	56.11	56.77	57.42	58.04	58.65	59.24
30	49.42	49.82	50.51	51.17	51.82	52.46	53.07	53.67	54.26
35	44.59	44.96	45.62	46.26	46.89	47.51	48.12	48.71	49.29
40	39.82	40.15	40.78	41.40	42.01	42.61	43.20	43.78	44.34
45	35.14	35.43	36.03	36.61	37.20	37.77	38.34	38.90	39.45
50	30.60	30.84	31.40	31.95	32.50	33.04	33.58	34.11	34.64
55	26.23	26.42	26.93	27.44	27.95	28.45	28.95	29.45	29.95
60	22.09	22.22	22.68	23.14	23.60	24.06	24.51	24.97	25.43
65	18.23	18.30	18.70	19.10	19.51	19.91	20.32	20.72	21.13
70	14.72	14.74	15.07	15.41	15.75	16.09	16.44	16.79	17.14
75	11.61	11.61	11.87	12.14	12.42	12.69	12.97	13.26	13.54
80	8.93	8.93	9.13	9.33	9.54	9.75	9.96	10.18	10.39
85	6.65	6.65	6.79	6.93	7.07	7.22	7.36	7.51	7.66
90	4.73	4.73	4.81	4.90	4.98	5.07	5.16	5.24	5.33
95	3.01	3.01	3.04	3.08	3.12	3.16	3.19	3.23	3.27

Fuente: cálculos propios.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

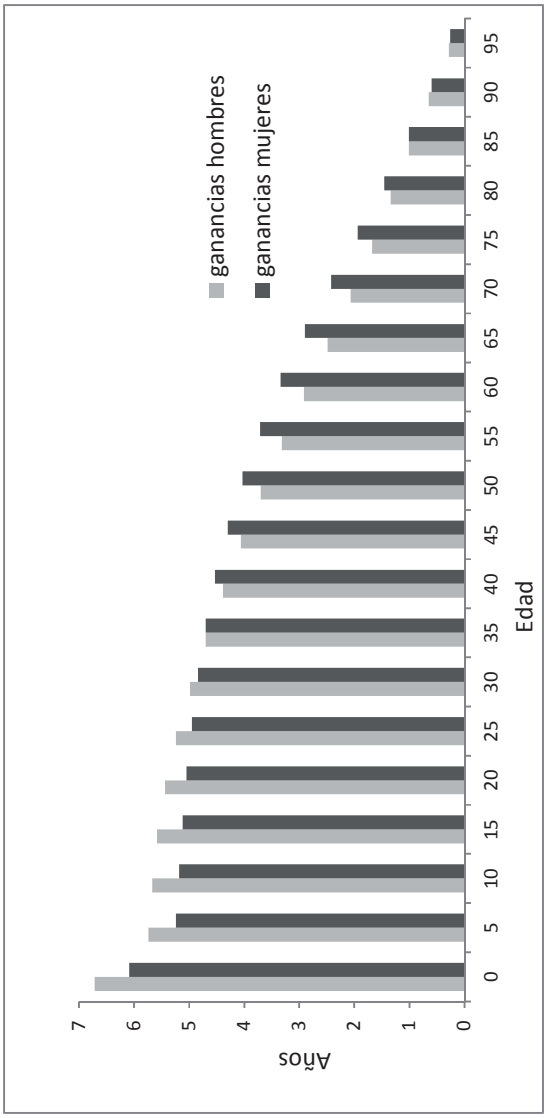
Las ganancias en la esperanza de vida, que se espera tendrá la población mexicana en los próximos 40 años, obtenidas a partir del las tablas de vida completas obtenidas por ajuste y proyección *spline-lx*, para hombres y mujeres, son:

Cuadro 4. México: ganancias en la esperanza de vida del año 2010 a 2050, por edad y sexo

Hombres	Ganancias	Mujeres	Ganancias
0	6.72	0	6.09
5	5.74	5	5.24
10	5.67	10	5.18
15	5.58	15	5.12
20	5.44	20	5.05
25	5.24	25	4.95
30	4.98	30	4.84
35	4.70	35	4.70
40	4.39	40	4.53
45	4.06	45	4.30
50	3.70	50	4.03
55	3.32	55	3.71
60	2.92	60	3.34
65	2.49	65	2.90
70	2.07	70	2.42
75	1.68	75	1.94
80	1.34	80	1.46
85	1.01	85	1.01
90	0.65	90	0.60
95	0.28	95	0.26

Fuente: cálculos propios.

Gráfica 5. México: ganancias en esperanza de vida 2010-2050



Fuente: elaboración del autor.

Bibliografía

HENRICI, P., 1982, *Essential of numerical analysis*, John Wiley & Sons, New York.

HILDEBRAND, Francis, 1987, *Introduction to numerical analysis*, McGraw-Hill, Inc.

KINCAID, David, Ward CHENEY, 1994, *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana.

MINA VALDÉS, Alejandro, 2001, "Funciones de sobrevivencia, empleadas en el análisis demográfico", en revista *Papeles de Población,* núm. 28, abr-jun, CIEAP-UAEM, Toluca, México.

MINA VALDÉS, Alejandro, 2006, "Ley de mortalidad mexicana, funciones de supervivencia", en *Revista Estudios Demográficos y Urbanos*, vol. 21, núm. 2.

Alejandro Mina Valdés
Actuario y Matemático por la Universidad Nacional Autónoma de México. Maestro en Demografía por El Colegio de México. Profesor-Investigador de tiempo completo del Centro de Estudios Demográficos Urbanos y Ambientales de El Colegio de México de 1979 a la fecha. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Entre sus publicaciones más importantes destaca el capítulo tres, tomo uno, de la obra: *Los grandes problemas de México*, editado por El Colegio de México en 2010, *Evolución de la mortalidad en México: pasado, presente y futuro.*
Correo electrónico: amina@colmex.mx

Este artículo fue recibido el 16 de junio de 2011 y aprobado el 27 de septiembre de 2011.